Soluții Panaitopol, Tulcea 2024 – clasa a VI-a

1. Determinați suma primelor 2024 de zecimale ale numărului $\dfrac{2}{10101}$.

***

Soluție. $\frac{2}{10101} = \frac{198}{999999} = 0{,}(000198)$ **3p**

Cum $2024 = 6 \cdot 337 + 2$, suma este $337 \cdot (1 + 8 + 9) = 6066$ **4p**

2. Andrei a trasat pe o foaie de hârtie unghiurile obtuze $\angle AOB$, $\angle BOC$ și $\angle COA$, dar nu a putut să le măsoare. Ana a trasat semidreapta $[OD$ și a constatat că $\angle AOD = 43°$, $\angle BOD = 66°$, $\angle COD = 140°$. Ce măsuri au unghiurile desenate de Andrei?

Mihail Bălună

Soluție. Dacă $\angle AOB$ și $\angle BOC$ nu ar fi adiacente, atunci măsura $\angle AOC$ ar fi modulul diferenței măsurilor $\angle AOB$ și $\angle BOC$, care este mai mică decât $90°$ – fals. Reiese că $\angle AOB$, $\angle BOC$ și $\angle COA$ sunt unghiuri în jurul punctului O **2p**

Dacă $(OD$ nu ar fi în interiorul $\angle AOB$, atunci $\angle BOD$ ar fi mai mare decât un unghi obtuz – fals. Reiese că $(OD$ este în interiorul $\angle AOB$ și $\angle AOB = 66° + 43° = 109°$ **2p**

Dacă $(OB$ ar fi în interiorul $\angle COD$, atunci am avea $\angle COB = \angle COD - \angle BOD = 140° - 66° < 90°$ – fals. Deducem că $(OA$ este în interiorul $\angle COD$, $\angle AOC = \angle COD - \angle AOD = 97°$ și $\angle BOC = 360° - \angle AOC - \angle AOB = 154°$ **3p**

3. Determinați numerele naturale nenule n și r știind că numerele 326, 420, 485 și 579 împărțite la n dau resturile r, $2r$, $3r$, respectiv $4r$.

Gazeta Matematică, *Gheorghe Radu*

Soluție. Aplicând teorema împărțirii cu rest obținem relațiile $326 = n \cdot a + r$, (1); $420 = n \cdot b + 2r$, (2); $485 = n \cdot c + 3r$, (3); $579 = n \cdot d + 4r$, (4) cu $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ și $4r < n$ **4p**

Efectuând $(1) + (2) - (3)$ rezultă $261 = n(a + b - c)$, de unde deducem că n este un divizor al lui 261. Cum $n > 4$, rezultă $n \in \{9, 29, 87, 261\}$. De asemenea, efectuând $(1) + (3) - (4)$ se obține $232 = n(a + c - d)$, deci n îl divide pe 232, adică $n \in \{8, 29, 58, 116, 232\}$. Așadar, $n = 29$ **2p**

În continuare, ținând cont că $4r < n$ și $326 = 29 \cdot 11 + 7$, rezultă $r = 7$ **1p**

4. Determinați mulțimea M a numerelor întregi n pentru care există numerele naturale nenule a și b astfel încât $(a, b) + [a, b] = a + b + n$. Notațiile (a, b) și $[a, b]$ desemnează cel mai mare divizor comun, respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b.

Mihail Bălună

Soluție. Arătăm că M este mulțimea numerelor pare nenegative **1p**

Fie $d = (a, b)$, $a = dA$, $b = dB$, cu $d, A, B \in \mathbb{N}^*$. Atunci $[a, b] - a = dAB - dA = A(dB - d) = A(b - (a, b)) \geqslant b - (a, b)$, deci $n \geqslant 0$ **2p**

Apoi: dacă a, b sunt pare, atunci (a, b) și $[a, b]$ sunt pare; dacă unul dintre numerele a, b este par iar celălalt este impar, atunci (a, b) este impar și $[a, b]$ este par; dacă a, b sunt impare, atunci (a, b) și $[a, b]$ sunt impare. Astfel, în toate cazurile, $(a, b) + [a, b] - a - b$ este par .. **2p**

Pe de altă parte: dacă $n \geqslant 0$ este par atunci, pentru $a = 2$ și $b = n+1$, $(2, n+1) + [2, n+1] = 1 + 2(n + 1) = (2 + n + 1) + n$, deci orice n par, $n \geqslant 0$ face parte din M **2p**

Soluții Panaitopol, Tulcea 2024 – clasa a VII-a

1. Trei numere reale sunt direct proporționale cu $3, 4, 5$. Mărind un număr cu 1, pe altul cu 2 și pe cel rămas cu 3 obținem trei numere care, convenabil ordonate, sunt direct proporționale cu $6, 7, 8$. Determinați numerele inițiale.

***

Soluție. Fie a, b, c numerele inițiale și x, y, z numerele finale. Atunci $a = 3k$, $b = 4k$, $c = 5k$ și $x = 6n$, $y = 7n$, $z = 8n$, cu $k, n \in \mathbb{R}$ **1p**

Rezultă $a + b + c = 3b$ și $x + y + z = 3y$. Cum $x + y + z = a + b + c + 6$, obținem $y = b + 2$, iar $x = a + 1$, $z = c + 3$, sau $x = a + 3$, $z = c + 1$ **2p**

În primul caz obținem $7n = 4k + 2$ și $6n = 3k + 1$, de unde $k = -\frac{5}{3}$, $a = -5$, $b = -\frac{20}{3}$, $c = -\frac{25}{3}$, valori care convin **2p**

În al doilea caz obținem $7n = 4k + 2$ și $6n = 3k + 3$, de unde $k = 3$, $a = 9$, $b = 12$, $c = 15$, valori care convin **2p**

2. Pe laturile paralelogramului $ABCD$ se construiesc, înspre exteriorul acestuia, triunghiurile echilaterale ABM, BCN, CDP și DAQ.

a) Arătați că $MNPQ$ este paralelogram.

b) Arătați că, dacă $ABCD$ este dreptunghi, atunci $MNPQ$ este romb.

c) Ce se poate spune despre $MNPQ$ dacă $ABCD$ este romb?

***

Soluție. a) Avem $\triangle MBN \equiv \triangle PDQ$ (LUL), deci $MN = PQ$. Analog $NP = MQ$, deci patrulaterul $MNPQ$ are laturile opuse congruente, de unde concluzia **3p**

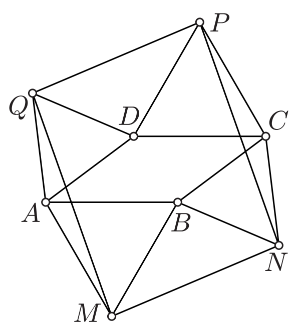


Figura a

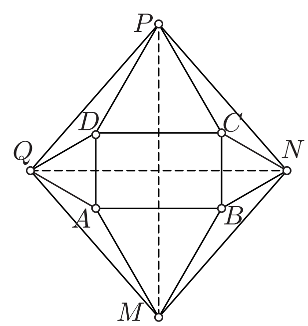


Figura b

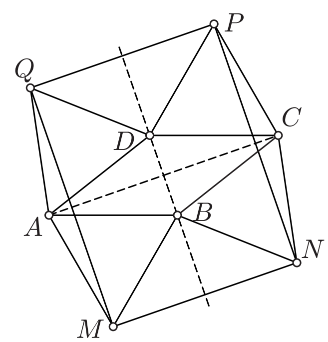


Figura c

b) M este pe mediatoarea segmentului AB, iar P este pe mediatoarea lui CD. Deducem că MP este mediatoarea comună a segmentelor AB și CD; analog NQ este mediatoarea comună a segmentelor BC și AD, deci $MP \perp NQ$. Reiese că $MNPQ$ este paralelogram cu diagonalele perpendiculare, adică romb **2p**

c) Dacă $ABCD$ este romb, atunci AC este axă de simetrie a figurii. Reiese că MN și QP sunt simetrice față de AC, deci $NP \parallel MQ \perp AC$. Analog $MN \perp BD$ și, cum $AC \perp BD$, reiese că $MNPQ$ este dreptunghi **2p**

3. Arătați că există două mulțimi disjuncte A și B astfel încât

$$A \cup B = \left\{\frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{51}}, \frac{1}{\sqrt{51}+\sqrt{52}}, \frac{1}{\sqrt{52}+\sqrt{53}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{161}+\sqrt{162}}\right\},$$

A și B au același număr de elemente, iar suma elementelor mulțimii A este egală cu suma elementelor mulțimii B.

Gazeta Matematică, *Dan Nedeianu*

Soluție. Fie S suma elementelor lui A, egală cu suma elementelor lui B. Atunci $2S = (\sqrt{51}-\sqrt{50})+(\sqrt{52}-\sqrt{51})+(\sqrt{53}-\sqrt{52})+\ldots+(\sqrt{162}-\sqrt{161}) = \sqrt{162}-\sqrt{50} = 9\sqrt{2}-5\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$, deci $S = 2\sqrt{2}$ **2p**

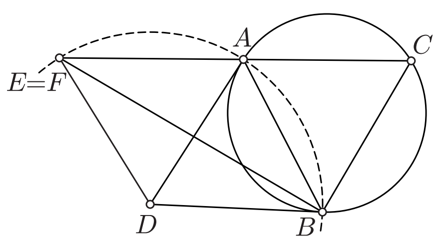
Luăm $A = \left\{\frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{51}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{m+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{p-1}+\sqrt{p}}\right\}$ și $B = (A \cup B) \setminus A$, $50 < n < 162$. Prin raționalizare, suma elementelor mulțimii A este $\sqrt{n}-\sqrt{50}+\sqrt{p}-\sqrt{m}$. Dorim ca $\sqrt{n}-5\sqrt{2}+\sqrt{p}-\sqrt{m} = 2\sqrt{2}$ **2p**

De asemenea, numărul elementelor lui A este $n-50+p-m$, iar numărul elementelor lui $A \cup B$ este 112 .... **2p**

Cerința este îndeplinită dacă luăm $n = 72$, $m = 128$, $p = 162$ **1p**

4. Tangentele în A și B la cercul circumscris triunghiului ascuțitunghic ABC se taie în D, iar perpendiculara în B pe BC taie AC în E. Arătați că $DE = DA$.

***



Soluție. Avem $DA = DB$. Fie F a doua intersecție a cercului ω de centru D și rază DA cu AC. Arătăm că $F = E$ **3p**

În ω avem $\angle AFB = \frac{1}{2}\widehat{AB} = \frac{1}{2}\angle ADB$ și, din cercul circumscris triunghiului ABC, $\angle ADB = 180^\circ - 2\angle BAD = 180^\circ - 2\angle ACB$, deci $\angle AFB = 90^\circ - \angle ACB$. Deducem $\angle BCF + \angle BFC = 90^\circ$, de unde $BF \perp BC$, deci $F = E$ **4p**

Soluţii Panaitopol, Tulcea 2024 – clasa a VIII-a

1. Există trei numere reale a, b, c, nenule și diferite două câte două, astfel încât

$$a-\frac{1}{b}=b-\frac{1}{c}=c-\frac{1}{a}\,?$$

***

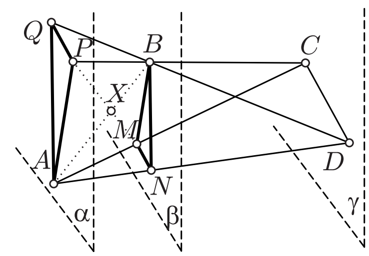
Soluție. Avem $bc(a-b)=c-b$ și analoagele **2p**

Prin înmulțire obținem $a^2b^2c^2(a-b)(b-c)(c-a)=(b-a)(c-b)(a-c)$ **3p**

Dacă numerele ar fi diferite, ar reieși $(abc)^2=-1$ – fals **2p**

2. Fie α, β, γ trei plane paralele și punctele necoplanare $A\in\alpha$, $B\in\beta$, $C,D\in\gamma$. Dreptele AC și AD taie β în M, respectiv N, iar dreptele BC și BD taie α în P, respectiv Q. Arătați că dreptele AB, PM și QN au un punct comun.

***



Soluție. Planul (AMN) taie planele $\beta\parallel\gamma$ după drepte paralele, deci $MN\parallel CD$ **1p**

Analog $PQ\parallel CD$, deci $MN\parallel PQ$ **1p**

În mod similar $AP\parallel BM$, $AQ\parallel BN$ **1p**

Din Teorema fundamentală a asemănării și Teorema lui Thales, $\frac{AP}{BM}=\frac{PC}{BC}=\frac{QD}{BD}=\frac{AQ}{BN}$ și $\frac{PQ}{MN}=\frac{PQ}{CD}\cdot\frac{CD}{MN}=\frac{QB}{BD}\cdot\frac{DA}{NA}=\frac{QB}{BD}\cdot\frac{DQ}{BQ}=\frac{DQ}{DB}=\frac{AQ}{BN}$, deci $\frac{AP}{BM}=\frac{AQ}{BN}=\frac{PQ}{MN}$, de unde $\triangle APQ\sim\triangle BMN$ (LLL) **2p**

Deoarece $AP\parallel BM$, dreapta PM taie AB într-un punct X astfel încât $\frac{AX}{XB}=\frac{AP}{BM}$. Analog, dreapta QN taie AB într-un punct X' astfel încât $\frac{AX'}{X'B}=\frac{AQ}{BN}$. Cum $\frac{AP}{BM}=\frac{AQ}{BN}$, rezultă $X=X'$, de unde concluzia **2p**

3. Ce numere mai mici decât 28 pot fi valori ale expresiei $E=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$, unde $a<b<c$ sunt numere prime?

Gazeta Matematică, *Cristinel Mortici*

Soluție. $2E=(b-a)^2+(c-a)^2+(c-b)^2$ **1p**

Cazul A. Dacă a este impar, atunci b, c sunt impare și $b-a\geqslant 2, c-b\geqslant 2$.

A1. Pentru $b-a=c-b=2$ deducem că $a, b=a+2, c=a+4$ sunt trei numere ce dau trei resturi diferite prin împărțire la 3, deci unul dintre ele se divide cu 3. Fiind și prime, unul dintre ele este 3. Singura posibilitate este $a=3$, $b=5$, $c=7$ și $E=12$ **2p**

A2. Pentru $b-a\geqslant 4$ sau $c-b\geqslant 4$ rezultă $2E\geqslant 2^2+4^2+6^2=56$, inadmisibil **1p**

Cazul B. Dacă $a=2$, din $E=(2-b)^2+(b-c)^2+(c-2)^2<56$ reiese $c-2\leqslant 7$. Cum c este prim, $c\in\{5,7\}$. Obținem soluțiile $a=2, b=3, c=5, E=7$; $a=2, b=3, c=7, E=21$; $a=2, b=5, c=7, E=19$ **2p**

Valorile cerute sunt 7, 12, 19 și 21 .... **1p**

4. Arătați că pentru orice zece numere reale $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{10}$ există un număr întreg n astfel încât toate numerele $x_1+n\sqrt{2}$, $x_2+n\sqrt{2}$, $x_3+n\sqrt{2}$, …, $x_{10}+n\sqrt{2}$ să fie iraționale.

***

Soluție. Considerăm mulțimile $A_k=\{x_i+k\sqrt{2}\mid 1\leqslant i\leqslant 10\}$, cu $1\leqslant k\leqslant 11$ **2p**

Dacă fiecare dintre aceste 11 mulțimi are cel puțin un element rațional atunci, din principiul cutiei, există $i\in\overline{1,10}$ și $k\neq l\in\overline{1,11}$ astfel încât $x_i+k\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ și $x_i+l\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. Rezultă $(k-l)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ – fals **5p**

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"LAURENŢIU PANAITOPOL"

Tulcea, 16 aprilie 2024

CLASA a 9-a – soluţii

Problema 1. Fie ABC un triunghi şi fie punctele $E \in (AB)$ şi $F \in (AC)$, astfel încât $\frac{AE}{EB} = \frac{FC}{AF} = \frac{1}{4}$. Fie M mijlocul lui AB, N mijlocul lui AC şi R mijlocul lui EF. Arătaţi că punctele M, R şi N sunt coliniare.

****

Soluţie.
MN este linie mijlocie în triunghiul ABC deci $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ **1p**
$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AR}$ **1p**
$\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF})$ **1p**
Cum $\frac{AE}{EB} = \frac{FC}{AF} = \frac{1}{4}$ rezultă $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$ **1p**
Combinând aceste relaţii, cum $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ obţinem $\overrightarrow{MR} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$. **2p**
În final obţinem $\overrightarrow{MR} = \frac{4}{5}\overrightarrow{MN}$ adică punctele M, R şi N sunt coliniare. **1p**
Orice altă soluţie (de exemplu sintetică) corectă va fi punctată corespunzător.

Problema 2.

1. Arătaţi că oricare ar fi $a > 0$ are loc inegalitatea $|x-a| + |x+a| \geq 2a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Arătaţi că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, are loc inegalitatea

   $|x-n| + |x-n+1| + \cdots + |x-1| + |x+1| + \ldots |x+n-1| + |x+n| \geq n(n+1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

3. Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care are loc egalitatea în inegalitatea de la punctul precedent.

****

Soluţie.

1. Se poate folosi inegalitatea triunghiului:

   $|x-a| + |x+a| = |a-x| + |x+a| \geq |a-x+x+a| = 2a$ **2p**

2. În inegalitatea de la punctul precedent dăm lui a pe rând valorile $1, 2, \ldots, n$

   şi obţinem $|x-k| + |x+k| \geq 2k$, pentru orice $k = \overline{1, n}$ **1p**

   Adunăm cele n inegalităţi şi obţinem $\sum_{k=1}^{n}(|x-k| + |x+k|) \geq 2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$ **1p**

3. Avem egalitate în inegalitatea de la 2. dacă şi numai dacă
   $|x-k|+|x+k|=2k$ pentru orice $k=\overline{1,n}$ **1p**
   Soluţiile ecuaţiilor $|x-k|+|x+k|=2k$ sunt $x\in[-k,k]$ **1p**
   şi în final avem $x\in\bigcap_{k=1}^{n}[-k,k]=[-1,1]$. **1p**

Problema 3. Determinaţi mulţimea tuturor valorilor posibile ale produsului $p=[x][y]$ dacă $xy=2024$ şi $x,y\in(0,+\infty)$. Am notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului a.

Cătălin Gherghe

Soluţie. Răspuns: $p=0$ sau $1012\le p\le 2024$ cu $p\in\mathbb{N}$.

Arătăm mai întâi că toate aceste valori sunt posbile.

Dacă $x\in(0,1)$ atunci $p=0$.

Dacă $x\in[1,2)$ expresia $2024/x$ ia toate valorile reale din intervalul (1012, 2024] şi deci $\left[\frac{2024}{x}\right]$ ia toate valorile naturale de la 1012 până la 2024. Cum $[x]=1$, produsul p ia toate valorile naturale de la 1012 până la 2024 .... **2p**

Vom arăta că acestea sunt singurele valori. Este clar că $[x][y]\le xy=2024$ **1p**

Dacă $[x]=0$ sau $[y]=0$ atunci $p=0$. Cazul $[x]=1$ sau $[y]=1$ a fost deja investigat. Rămâne să arătăm că dacă $x,y\ge 2$ avem $p\ge 1012$ **1p**

Este clar că $[x]\ge 3$ sau $[y]\ge 3$ (altfel ambele numere ar fi mai mici decât 3, imposibil). Presupunem $[x]\ge 2$ şi $[y]\ge 3$. **1p**

Deoarece $[x]\ge 2$ avem

$$\frac{x}{[x]}<\frac{[x]+1}{[x]}=1+\frac{1}{[x]}\le 1+\frac{1}{2}.$$

Deoarece $[y]\ge 3$ avem

$$\frac{y}{[y]}<\frac{[y]+1}{[y]}=1+\frac{1}{[y]}\le 1+\frac{1}{3}.$$

Înmulţind cele două inegalităţi obţinem

$$\frac{xy}{[x][y]}<\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=2$$

şi deci $[x][y]>\frac{xy}{2}=1012$. **2p**

Problema 4. Fie $1\le a_1<a_2<a_3\dots$ un şir strict crescător de numere naturale.

1. Demonstraţi că inegalitatea

$$2(a_1+\cdots+a_n)\le(a_{n+1}-1)a_{n+1}$$

   este adevărată pentru orice n număr natural $n\ge 1$.

2. Demonstraţi inegalitatea

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{2n+1}{3}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

pentru orice $n \geq 1$.

Laurenţiu Panaitopol

Soluţie.

1. $2(a_1 + \cdots + a_n) \leq 2(1 + 2 + \cdots + a_n) = a_n(a_n + 1) \leq (a_{n+1} - 1)a_{n+1}$. deoarece numere sunt naturale şi $a_{n+1} \geq a_n + 1$ **2p**

2. Demonstrăm inegalitatea prin inducţie.

   Pentru $n = 1$, deoarece $a_1 \geq 1$ deducem $a_1^2 \geq \frac{2 \cdot 1 + 1}{3} a_1$. **1p**

   Presupunem inegalitatea adevărată pentru n. Pentru a demonstra propoziţia în cazul $n + 1$ este suficient să demonstrăm că

   $$a_{n+1}^2 \geq \frac{2}{3}(a_1 + \cdots + a_n) + \frac{2n+3}{3} a_{n+1},$$

   adică $3a_{n+1}^2 - (2n+3)a_{n+1} \geq 2(a_1 + \cdots + a_n)$. **2p**

   Folosind inegalitatea de la punctul 1. va fi suficient să demonstrăm că

   $$3a_{n+1}^2 - (2n+3)a_{n+1} \geq (a_{n+1} - 1)a_{n+1}$$

   sau echivalent $a_{n+1} \geq n + 1$. **1p**

   Dar această ultimă inegalitate este adevărată pentru că şirul este crescător,

   este format din numere naturale si $a_1 \geq 1$. **1p**

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "LAURENŢIU PANAITOPOL"

Tulcea, 16 aprilie 2024

CLASA a 10-a – soluţii

Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$2^{x^2} + 4^x \cdot \log_3(x-2) = 4^x + 32^x.$$

Lucian Dragomir, Oţelu-Roşu

Soluţie.

Prin împărţire cu 4^x ecuaţia devine $2^{x^2-2x} + \log_3(x-2) = 1 + 8^x$. **1p**

Adunăm în fiecare membru $\log_3 x$ şi obţinem $2^{x^2-2x} + \log_3 x(x-2) = \log_3 3x + 2^{3x}$.**2p**

Definim funcţia $f : (2, \infty) \to \mathbb{R}$ prin $f(u) = 2^u + \log_3 u$. Funcţia f este strict crescătoare (ca sumă de funcţii strict crescătoare), deci injectivă...................... **2p**

Deoarece $f(x^2-2x) = f(3x)$ rezultă $x^2 - 2x = 3x$ **1p**

Obţinem $x = 0$ care nu convine şi $x = 5$. **1p**

Simpla observaţie că $x = 5$ este soluţie a a ecuaţiei şi verificarea acestui fapt aduce elevului 1 punct dar care nu se adaugă la cele de mai sus.

Problema 2. Determinaţi valorile naturale nenule ale parametrului k pentru care expresia

$$E(x) = \sin kx \cdot \sin^k x + \cos kx \cdot \cos^k x - \cos^k 2x$$

este independentă de x.

Laurenţiu Panaitopol

Soluţie.

Arătăm că singura valoare convenabilă este $k = 3$.

Avem $E(0) = 0$ şi deci $E(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.............................. **1p**

Pentru $x = \frac{\pi}{k}$ avem $E(\frac{\pi}{k}) = -\cos^k \frac{\pi}{k} - \cos^k \frac{2\pi}{k} = 0$ $(*)$............................ **1p**

Pentru $k \geq 4$ avem $\frac{\pi}{k} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ deci $\cos \frac{\pi}{k} > 0$ şi $\cos \frac{2\pi}{k} \geq 0$ şi deci egalitatea $(*)$ este imposibilă deoarece membrul stâng este strict negativ. Avem $1 \leq k \leq 3$ **2p**

Pentru $k = 1$ egalitatea $E(x) = 0$ devine $\cos 2x = 1$, care evident nu se verifică pentru orice $x \in \mathbb{R}$

Pentru $k = 2$ egalitatea $(*)$ nu se verifică. **1p**

Pentru $k = 3$ egalitatea $E(x) = 0$ se verifică pentru orice $x \in \mathbb{R}$ deoarece

$E(x) = \sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x - \cos^3 2x =$

$= (3 \sin x - 4 \sin^3 x) \sin^3 x + (4 \cos^3 x - 3 \cos x) \cos^3 x - (\cos^2 x - \sin^2 x)^3 = 0$ **2p**

Problema 3. Fie numerele complexe $z_i, w_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, 2024}$ cu $z_1 = w_1 \in \mathbb{R}^*$. Presupunem că pentru orice submulţime $I \subset \{1, 2, \ldots, 2024\}$ avem

$$\left| \sum_{j \in I} z_j \right| = \left| \sum_{j \in I} w_j \right|.$$

Demonstraţi că $z_j = w_j$ pentru orice $j = \overline{2, 2024}$ sau $z_j = \overline{w}_j$ pentru orice $j = \overline{2, 2024}$.

*****

Soluţie. Fie $z_1 = w_1 = a$. Aplicăm ipoteza pentru $I = \{k\}$ şi $I = \{1, k\}$, $k \geq 2$ ... **1p**

Notăm $z_k = u_k + iv_k$ şi $w_k = s_k + it_k$ şi avem $|z_k| = |w_k|$ şi $|a + z_k| = |a + w_k|$ ... **1p**

Obţinem relaţiile $u_k^2 + v_k^2 = s_k^2 + t_k^2$ şi $(a + u_k)^2 + v_k^2 = (a + s_k)^2 + t_k^2$,
de unde rezultă că $2au_k = 2as_k$, pentru orice k şi deci, deoarece $a \neq 0$, avem $u_k = s_k$ şi deci $v_k = \pm t_k$, adică $z_k \in \{w_k, \overline{w}_k\}$ **2p**

Arătăm acum că $z_k = w_k$ pentru orice $k = \overline{2, 2024}$ sau $z_k = \overline{w}_k$ pentru orice $k = \overline{2, 2024}$.

Presupunem că există $j \neq k$ cu $z_j = w_j$ şi $z_k = \overline{w}_k$, iar $w_j, w_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. **1p**

Aplicăm ipoteza pentru $I = \{j, k\}$ şi obţinem $|z_j + z_k| = |w_j + w_k| = |z_j + \overline{z}_k|$,
de unde rezultă că $(u_j + u_k)^2 + (v_j + v_k)^2 = (u_j + u_k)^2 + (v_j - v_k)^2$ şi deci $v_j v_k = 0$ adică $v_j = 0$ sau $v_k = 0$, contradicţie. **2p**

Problema 4. Fie şirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2 + 1)$. Demonstraţi că

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + a_k} < \frac{1}{2}.$$

*****

Soluţie. Să observăm că $a_n > 1$ pentru orice n (inducţie după n). **1p**

Relaţia de recurenţă se rescrie $2(a_{n+1} - 1) = a_n^2 - 1 = (a_n - 1)(a_n + 1)$ şi deci $\frac{1}{a_{n+1}-1} = \frac{2}{a_n^2-1} > 0$ pentru orice n. **2p**

Demonstrăm prin inducţie că $s_n = \frac{1}{2} - \frac{2}{a_n^2-1}$ pentru orice $n \geq 1$.................. **1p**

Deoarece $a_1 = 3$ se verifică repede că $s_1 = \frac{1}{1+a_1} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2} - \frac{2}{a_1^2-1}$.......... **1p**

Presupunând acum ipoteza de inducţie obţinem
$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{1+a_{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{a_n^2-1} + \frac{1}{1+a_{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a_{n+1}-1} + \frac{1}{1+a_{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{a_{n+1}^2-1} < \frac{1}{2}$. . **2p**

Concursul Naţional ”Laurenţiu Panaitopol”

Soluţii şi barem – clasa a XI-a

Problema 1. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A + A^t = I_n$, cu A inversabilă. Arărătaţi că $A - A^{-1} = (-1)^n \det(I_n + A)$.

Marius Drăgan

Soluţie. Avem $A - A^{-1} = A^{-1}(A^2 - I_n) = A^{-1}(A + I_n)(A - I_n) = A^{-1}(-A^t)(A + I_n)$ .... 3 puncte

Prin urmare $\det(A - A^{-1}) = \frac{1}{\det A}(-1)^n \det(A + I_n)$ .... 4 puncte

Problema 2. Fie $(a_n)_n$ un şir convergent, $M > 0$ şi $(b_n)_n$ un şir astfel încât

$$|b_n - b_m| \leq M(a_n - a_m),$$

pentru orice $n \geq m$, numere naturale. Arătaţi că $(b_n)_n$ este de asemenea convergent.

* * *

Soluţie. Rezultă imediat că $(b_n)_n$ este mărginit; într-adevăr deoarece $(a_N)_n$ e mărgint, avem $|a_n| \leq K$ pentru o valoare $K > 0$, deci $|b_n| \leq |b_1|M \cdot N + M|a_1|$, . 1 punct

Fie atunci $(b_{n_k})_k$ un subşir convergent la $b \in \mathbb{R}$.
.... 1 punct

Arătăm că $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.Într-adevăr

$$|b_n - b| = |b_n - b_{n_k} + b_{n_k} - b| \leq |b_n - b_{n_k}| + |b_{n_k} - b| \leq \leq M|a_n - a_{n_k}| + |b_{n_k} - b|$$

pentru $n \geq k$............ 2 puncte

Fie $\varepsilon > 0$. Cum $(a_n)_n$ este convergent, rezultă că există n_ε astfel încât pentru $n > n_k \geq n_\varepsilon$, avem $a_n - a_{n_k} \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ şi $|b_{n_k} - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$............ 2 puncte

Prin urmare, pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem $|b_n - b| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .... 1 punct

Observaţie. Se acordă întreg punctajul dacă elevul observă cu argumente că este îndeplinită condiţia Cauchy.

Problema 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $BA - 2AB = I_n$. Arătaţi că $\det(AB - BA) = 0$.

Florin Rotaru

Soluţie. Din $BA - AB = I_n + AB$ rezultă $\det(I_n + AB) = \det(BA - AB)$....2 puncte

Analog din $I_n + BA = 2(BA - AB)$ deducem $\det(I_n + BA) = 2^n \det(BA - AB)$ 2 puncte

Cum $\det(I_n + AB) = \det(_n + BA)$ (*), deducem $\det(AB - BA) = 0$1 punct pus 2 puncte pentru justificarea afirmaţiei (*).

Justificare afirmaţie (*). Dacă B e inversabilă

$\det(I_n + BA) = \det B(I_n + AB)B^{-1} = \det(I_n + AB)$. *Dacă B nu e inversabilă se poate alege un şir $(x_n)_n$ convergent la zero astfel toate matricile $B + x_n I_n$ să fie inversabile. Aplicând prima parte şi trecând apoi la limită, se obţine afirmaţia.*

Problema 4. Demonstraţi că şirul $(\lfloor n\sqrt{2} \rfloor)_{n\geq 1}$ conţine o infinitate de pătrate perfecte.

Observaţie. Se poate folosi următorul rezultat, numit adesea teorema lui Weyl: pentru orice $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şirul părţilor fracţionare $(\{n^2\alpha\})_{n\geq 1}$ este dens în $[0, 1]$.

G. René

Soluţie. Vom demonstra că există o infinitate de numere naturale n pentru care

$$\lfloor(\lfloor n^2/\sqrt{2}\rfloor+1)\sqrt{2}\rfloor = n^2,$$

adică

$$n^2 \leq (\lfloor n^2/\sqrt{2}\rfloor+1)\sqrt{2} < n^2+1$$

(şi orice formulă ce duce la rezultat) .... 2 puncte

Pentru inegalitatea din stânga putem scrie

$$(\lfloor n^2/\sqrt{2}\rfloor+1)\sqrt{2} > \frac{n^2}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2} = n^2.$$

.... 1 punct

Pentru inegalitatea din dreapta, va fi suficient să avem

$$\lfloor\frac{n^2}{\sqrt{2}}\rfloor\sqrt{2}+\sqrt{2} < n^2+1,$$

pentru o infinitate de valori n, ... 1 punct

ceea ce este echivalent cu

$$\frac{n^2}{\sqrt{2}} - \lfloor\frac{n^2}{\sqrt{2}}\rfloor > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ceea ce conform teoremei lui Weyl e adevărat pentru o imfinitate de valori $n \in \mathbb{N}$.3 puncte

Concursul Naţional ”Laurenţiu Panaitopol”

Soluţii şi barem – clasa a XII-a

Problema 1. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continuă cu proprietăţile $f(0)=0$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$. Calculaţi dovedind existenţa

$$\lim_{x\to 0, t>0}\frac{1}{t}\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}x.$$

(* * *)

Soluţie. Fie F primitiva funcţiei f cu $F(0)=0$. Funcţia dată de $G(x)=\frac{1}{t}F(tx)$ defineşte o primitivă a funcţiei definită prin $g(x)=f(tx)$ pentru fiecare $t\in[0,1]$ .... 3 puncte

Avem

$$L=\lim_{t\to 0, t>0}\frac{1}{t}\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}x=\lim_{t\to 0, t>0}\frac{G(1)-G(0)}{t},$$

.... 1 punct

Prin urmare, folosind regula lui l'Hospital

$$L=\lim_{t\to 0, t>0}\frac{F(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0, t>0}\frac{f(t)}{2t}=\frac{1}{2}.$$

....3 puncte

Problema 2. Fie A un inel unitar înzestrat cu o funcţie $f:A\to\mathbb{R}^+$ cu proprietăţile:

1) $f(xa)=|x|f(a)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi $a\in A$;

2) $f(a)=0$ dacă şi numai dacă $a=0$;

3) $f(a+b)\le f(a)+f(b)$ şi $f(ab)\le f(a)f(b)$ oricare ar fi $a,b\in A$.

Arătaţi că dacă $a,b\in A$ verifică $ab-ba=a$, atunci a este nilpotent (i.e. există $n\in\mathbb{N}^*$ cu $a^n=0$).

(* * *)

Soluţie. Prin inducţie rezultă $a^nb-ba^n=na^n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.....3 puncte

Aplicând f rezultă

$$nf(a^n)=f(na^n)=f(a^nb-ba^n)\le f(a^nb)+f(ba^n)\le f(a^n)f(b)+f(b)f(a^n)=2f(b)f(a^n)$$

.... 2 puncte

De aici dacă $f(a^n)=0$ pentru orice n ar rezulta $n\le 2f(b)$, absurd. Deci există n_0 cu $f(a^{n_0})=0$ echivalent cu $a^{n_0}=0$....................................2 puncte

Problema 3. Fie $(a_n)_n$ un şir de numere pozitive astfel încât există şi e finită $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ Arătaţi că şirul $(b_n)_n$ definit prin

$$b_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k+a_k},$$

este convergent şi determinaţi limita.

G. René

Soluţie. E imediat de arătat că şirul $(c_n)_n$ definit prin

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

este convergent la $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2$. .... 1 punct

Vom arăta că există $c > 0$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0$ avem $0 \leq c_n - b_n \leq \frac{c}{\sqrt{n}}$, ceea ce va atrage că $(b_n)_n$ are limita $\ln 2$.
.... 2 puncte

Cum $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ şi $\alpha > 0$ astfelîncât $a_n \leq \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$ pentru $n \geq n_0$.
.... 1 punct

Avem, pentru $n \geq n_0$

$$c_n - a_n = \sum_{k=1} \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+a_{n+k}} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n+k}}{(n+k)(n+k+a_{n+k})}.$$

Deducem

$$c_n - b_n \leq \frac{\alpha\sqrt{2n}}{n^2} \leq \frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

adică ceea ce trebuia arătat. .... 3 puncte

Problema 4. Fie A un inel cu proprietatea că dacă $x \in A$ şi $x^2 = 0$, atunci$x = 0$. Arătaţi că dacă $a, b, c \in A$ sunt astfel încât $a^2 = ab, b^2 = bc, c^2 = ca$ atunci $a = b = c$.

Mihai Opincariu

Soluţie. Observăm că intr-un astfel de inel, dacâ $xy = 0$ atunci $yx = 0$. E suficient pentru aceasta să observăm că în ipoteza dată avem $(yx)^2 = yxyx = 0$ deci $yx = 0$. .... 1 punct

Din ipoteză avem $a(a-b) = 0$ deci $(a-b)a = a^2 - ba = 0$, aşadar a şi b comută. Prin simetrie a, b, c comută două câte două. .... 1 punct

Avem $abc = a(bc) = ab^2 = abb = a^2b = aab = aa^2 = a^3$. Analog $bca = b^3, cab = c^3$ şi din comutare avem $abc = a^3 = b^3 = c^3$ .... 2 puncte

Mai departe, cum $a^3 = b^3$, avem $(a-b)^3 = 3(ab^2 - ab^2) = 3b(ab - a^2) = 0$. De aici $(a-b)^4 = 0$, deci $(a-b)^2 = 0$, aşadar $a - b = 0$. Analog $b = c$........3 puncte