CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”
EDIŢIA a X-a, TULCEA, 21 aprilie 2018
Clasa a VII - a
Soluţii orientative şi bareme

Problema 1.

Se consideră numerele reale *x*, *y* şi *z*, cel puţin două dintre ele fiind diferite. Arătaţi că $x+y+z=0$ dacă şi numai dacă $x^2+xy+y^2=y^2+yz+z^2=z^2+zx+x^2$.

Dacă $x+y+z=0$, atunci $z=-(x+y)$ şi egalităţile se probează prin calcul direct	**3p**
Dacă $x^2+xy+y^2=y^2+yz+z^2=z^2+zx+x^2$, presupunem că $x\neq y$. Egalitatea $y^2+yz+z^2=z^2+zx+x^2$ este echivalentă cu $(x-y)(x+y+z)=0$, deci $x+y+z=0$	**4p**

Problema 2.

În triunghiul *ABC* avem $AB=BC$, iar $D\in(BC)$ astfel încât $AD=AB$. Mediatoarea segmentului $[DC]$ intersectează bisectoarea unghiului *ABD* în punctul *O*. Arătaţi că $OA=OI$, unde *I* este centrul cercului înscris în triunghiul *ABD*.

Dacă *H* este intersecţia bisectoarei unghiului *ABC* cu paralela prin *A* la *BC*, rezultă că patrulaterul *ABCH* este romb, iar *ADCH* este trapez isoscel. Mediatoarea segmentului *AH* coincide cu mediatoarea segmentului *CD* şi fie *M* mijlocul lui segmentului *AH* (1)	**3p**
Deoarece $AB=AD$, rezultă că $AI\perp BC$, deci $AI \parallel OM$ şi, cumulat cu (1), deducem că *OM* este linie mijlocie în triunghiul dreptunghic *AIH*. Cum segmental *AO* este mediana corespunzătoare ipotenuzei *HI*, rezultă concluzia.	**4p**

Problema 3.

Numerele *m* şi *n* sunt naturale, mai mari decât 1. Calculaţi $m-n$ ştiind că numerele $\frac{m-1}{n}$ şi $\frac{n^2-1}{m}$ sunt simultan naturale.

Din $n \mid m-1$ rezultă că există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $m=nk+1$	**1p**
Deci $nk+1 \mid n^2-1$. Deoarece $nk+1 \mid n^2k+n$ şi $nk+1 \mid n^2k-k$, rezultă că $nk+1 \mid n+k$	**4p**
Deducem că $nk+1\leq n+k$, echivalent cu $(k-1)(n-1)\leq 0$, deci $k=1$. Obţinem $m-n=1$	**2p**

Problema 4.

Se consideră triunghiul ascuţitunghic *ABC*. Punctul *M* aparţine segmentulului (AC), iar punctul *N* aparţine semidreptei $(MC$ astfel încât $[MN]\equiv[AC]$. Perpendiculara din *M* pe dreapta *BC* intersectează perpendiculara din *N* pe dreapta *AB* în punctul *K*. Paralela prin *K* la dreapta *AC* intersectează perpendiculara din *B* pe dreapta *AC* în punctul *H*. Arătaţi că *H* este ortocentrul triunghiului *ABC*.

Fie H' punctul de intersecţie a înălţimii din *A* a triunghiului *ABC* cu paralela prin *K* la dreapta *AC*. Patrulaterul $AMKH'$ este paralelogram	**2p**
Deoarece $AM=CN$, rezultă că şi patrulaterul $KNCH'$ este paralelogram, deci $CH' \parallel NK$, adică $CH'\perp AB$.	**4p**
Deducem că H' este ortocentrul triunghiului *ABC* şi $H'=H$	**1p**

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”
EDIŢIA a X-A, TULCEA, 21aprilie 2018
Soluţii orientative şi bareme
Clasa a VIII-a

Problema 1. Determinaţi toate tripletele de numere naturale nenule (m,n,p) pentru care $mn+np+pm-mnp=2$.

Presupunem că $m \geq n \geq p$. Deducem că $3mn \geq mnp+2$, deci $p \in \{1,2\}$	**3p**
Dacă $p=1$, deducem că $p(m+n)=2$, deci $m=n=1$. Obţinem tripletul $(1,1,1)$	**2p**
Dacă $p=2$, obţinem $(m-2)(n-2)=2$ şi obţinem $(4,3,2)$ şi permutările acestora	**2p**

Problema 2. Se consideră piramida patrulateră regulată *SABCD* în care $AB=1$ şi $SA=\sqrt{3}$. Punctele *M* şi *N* sunt mijloacele muchiilor $[SC]$, respectiv $[SB]$. Determinaţi măsura unghiului dintre dreptele AN şi BM .

Avem $MN=BC/2=AP$, unde *P* este mijlocul segmentului *AD*, deci patrulaterul *ANMP* este paralelogram. Prin urmare, $m\left(AN,BM\right)=m\left(PM,BM\right)=m\left(\widehat{PMB}\right)$	**3p**
Din calcul, obţinem $PB=MB=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.(1)	**1p**
Fie *Q* proiecţia lui *M* pe planul (ABC) . Rezultă *Q* este mijlocul segmentului *OC*, unde *O* este centrul bazei piramidei. Se demonstrează că triunghiul *PQB* este isoscel cu $BQ=QP$ (şi dreptunghic). Prin urmare, cum proiecţia triunghiului *MBP* pe planul (ABC) este triunghiul *QBP*, rezultă $MP=MB$ (2)	**2p**
Din (1) şi (2) rezultă trioungiul *MBP* echilateral, deci $m\left(\widehat{PMB}\right)=60^\circ$	**1p**

Problema 3. Determinaţi numerele reale a, $a \geq 1$, pentru care există cel puţin un triplet de numere reale (x,y,z) care verifică inegalitatea $2x\sqrt{y-a}+2y\sqrt{z-a}+2z\sqrt{x-a} \geq xy+yz+zx$.

Evident, $x,y,z \geq a$, Avem $2x\sqrt{y-a}=\dfrac{2x\sqrt{a(y-a)}}{\sqrt{a}} \leq \dfrac{xy}{\sqrt{a}}$ (din inegalitatea mediilor), cu egalitate pentru $y=2a$ şi analoagele.	**3p**
Deci $\sqrt{a}(xy+yz+zx) \leq 2x\sqrt{y-a}+2y\sqrt{z-a}+2z\sqrt{x-a} \leq xy+yz+zx$. Obţinem $a \leq 1$ şi, cumulat cu ipoteza, $a=1$. Pentru $a=1$, există tripletul $(x,y,z)=(2,2,2)$	**4p**

Problema 4. Se consideră triunghiul ascuţitunghic *ABC* în care *O* este centrul cercului circumscris. Punctele *D*, *E* şi *F* sunt situate pe segmentele (BC), (AC) şi respectiv (AB) astfel încât $DE \perp OC$ şi $DF \perp OB$. Dacă *P* este centrul cercului circumscris triunghiului *AEF*, arătaţi că $PD \perp BC$.

Triunghiul *OBC* este isoscel şi $m\left(\widehat{BOC}\right)=2m\left(\widehat{BAC}\right)$	**1p**
Deducem că $m\left(\widehat{EDC}\right)=m\left(\widehat{FDB}\right)=m\left(\widehat{BAC}\right)$, deci bisectoarea unghiului *EDF* este perpendiculară pe dreapta *BC*.	**1p**
Bisectoarea unghiului EDF intersectează mediatoarea segmentului FE în punctul P' Rezultă că patrulaterul $EDFP'$ este inscriptibil şi $P'E=P'F$	**3p**
Deoarece $m\left(\widehat{FP'E}\right)=180^\circ-m\left(\widehat{FDE}\right)=2m\left(\widehat{BAC}\right)$, rezultă că punctul *A* este situat pe cercul cu centrul în P' şi rază $P'E=P'F$. Deducem că $P=P'$, deci $PD \perp BC$.	**2p**

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ
”LAURENŢIU PANAITOPOL”
Tulcea. 21 Aprilie 2018
Clasa a 9-a

(1) Să se găsească cel mai mare element al mulţimii $\{\sin 1, \sin 2, \sin 3\}$.

***

Soluţie.

Ţinând seama de monotonia funcţiei sinus pe intervalul $(0, \pi)$, avem $\sin 1 > \sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4} > \sin 3$ **2p**

Transformăm în produs diferenţa $\sin 2 - \sin 1 = 2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{3}{2}$ **2p**

Produsul de mai sus este pozitiv pentru că $\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ **2p**

$\sin 2$ este cel mai mare element al mulţimii **1p**

(2) (a) Să se arate că $\left|x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$ pentru orice $x \in [0, 2]$.

(b) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funcţia definită prin $f(x) = x^2 + ax + b$. Să se arate că cel puţin una dintre inegalităţile $f(0) - f(1) \geq 1$ şi $f(2) - f(1) \geq 1$ este adevărată.

(c) Să se găsească cea mai mică valoare a lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât există numerele $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care inegalitatea $|x^2 + ax + b| \leq m$ este satisfăcută pentru orice $x \in [0, 2]$.

Cătălin Gherghe, Bucureşti

Soluţie.

(a) Inegalitatea este echivalentă cu $0 \leq (x - 1)^2 \leq 1$, care este adevărată pentru orice $x \in [0, 2]$ **2p**

(b) Avem $f(0) - f(1) = -1 - a \geq 1$ dacă şi numai dacă $a \leq -2$ şi $f(2) - f(1) = a + 3 \geq 1$ dacă şi numai dacă $a \geq -2$, adică cel puţin una dintre inegalităţi este adevărată indiferent de numerele $a, b \in \mathbb{R}$. **2p**

(c) Folosind punctul (b) avem că $f(0) - f(1) \geq 1$ sau $f(2) - f(1) \geq 1$. Presupunem că $f(0) - f(1) \geq 1$. Atunci, din inegalitatea modulului, avem $1 \leq |f(0) - f(1)| \leq |f(0)| + |f(1)| \leq 2m$. Deci $m \geq \frac{1}{2}$. Folosind acum punctul (a) obţinem că valoarea minimă a lui m este $m = \frac{1}{2}$, caz în care avem, de exemplu, $a = -2$ şi $b = \frac{1}{2}$. Analog se studiază cazul $f(2) - f(1) \geq 1$. **3p**

(3) Fie $a \in \mathbb{Z}$ un număr impar negativ fixat şi $(x_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu $x_1 = a$ şi raţia $r \in \mathbb{Z}^*$. Definim mulţimea $M = \{n \in \mathbb{N}^* \mid |x_n - n| = 1\}$. Găsiţi toate valorile lui r pentru care mulţimea M are exact două elemente.

Marcelina Popa, Tulcea

Soluţie. Arătăm că singura valoare convenabilă pentru r este $r = 2$.

Să observăm mai întâi că dacă $n \in M$ atunci $a + (n - 1)r = n + 1$ (varianta (i)) sau $a + (n - 1)r = n - 1$ (varianta (ii)). **1p**

Presupunem că $M = \{n_1, n_2\}$ cu $n_1 \neq n_2$. Sunt posibile patru cazuri:

(1) n_1 şi n_2 sunt ambele în varianta (i);

(2) n_1 şi n_2 sunt ambele în varianta (ii);

(3) n_1 este în varianta (i) şi n_2 este în varianta (ii);

(4) n_1 este în varianta (ii) şi n_2 este în varianta (i). **1p**

Cazurile (1) şi (2): Scădem relaţiile corespunzătoare lui n_1 şi n_2 şi obţinem $(n_1 - n_2)(r - 1) = 0$, de unde rezultă că $r = 1$ şi deci $a = 2$ (în cazul (1)), respectiv $a = 0$ (în cazul (2)). Acest lucru nu este posibil deoarece a este număr impar negativ. **1p**

Cazul (3): Scădem relaţiile corespunzătoare lui n_1 şi n_2 şi obţinem $(n_1 - n_2)(r - 1) = 2$, de unde rezultă că $r - 1$ divide pe 2 şi deci $r \in \{-1, 0, 2, 3\}$. Cazul $r = 0$ se exclude prin condiţia din ipoteză. Deoarece n_2 verifică varianta 2, avem $(n_2 - 1)(1 - r) = a$. Cum a este număr impar, rezultă că singura valoare posibilă pentru r este $r = 2$. Cazul (4) se tratează analog. **2p**

Arătăm acum că dacă $r = 2$ atunci mulţimea M are exact două elemente. Deoarece $r = 2$ rezultă $x_n = a + 2(n - 1)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $x_{n_1} - n_1 = 1$ dacă $n_1 = 3 - a$

şi $x_{n_2} - n_2 = -1$ dacă $n_2 = 1 - a$. Evident $n_1 \neq n_2$ şi deci mulţimea M are exact două elemente. **2p**

(4) Fie l şi m două drepte distincte concurente şi fie $M = \{\overrightarrow{v_i} \mid i = \overline{1, 2018}\}$ o mulţime de 2018 vectori având direcţiile paralele cu una din cele două drepte. Presupunem că $|\overrightarrow{v_i}| \neq |\overrightarrow{v_j}|$ pentru orice $i \neq j$. Dacă $|\overrightarrow{v_i}| \in \{1, 2, \ldots, 2018\}$, pentru orice $i = \overline{1, 2018}$, să se decidă dacă suma $\sum\limits_{i=1}^{2018} \overrightarrow{v_i}$ poate fi egală cu $\overrightarrow{0}$.

***

Soluţie. Fie $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ versorii dreptelor l şi m (adică vectorii de lungime egală cu 1 având direcţiile celor două drepte). După o eventuală renumerotare, putem presupune că există un număr natural k între 1 şi 2018 şi numerele reale a_i şi b_j, astfel încât $\overrightarrow{v_i} = a_i \overrightarrow{u}$ pentru $i = \overline{1, k}$ şi $\overrightarrow{v_j} = b_j \overrightarrow{v}$ pentru $j = \overline{(k+1), 2018}$. Din ipoteză, $|a_i|$ şi $|b_j|$ sunt toate numerele naturale de la 1 la 2018. . . . . **2p**

Dacă $\sum\limits_{i=1}^{2018} \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{0}$, atunci $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\right) \overrightarrow{u} + \left(\sum\limits_{i=k+1}^{k} b_i\right) \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, şi deoarece vectorii $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ nu sunt coliniari, rezultă că $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i = \sum\limits_{i=k+1}^{2018} b_i = 0$ **2p**

Evident $(*)$ $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i + \sum\limits_{i=k+1}^{2018} b_i = 0$ şi $\sum\limits_{i=1}^{k} |a_i| + \sum\limits_{i=k+1}^{2018} |b_i| = 1 + 2 + \cdots + 2018 = 1009 \cdot 2019$. Notând cu x suma termenilor pozitivi şi cu $-y$ suma termenilor negativi din suma $(*)$, avem $x - y = 0$ şi deci $x = y$. Pe de altă parte, $x + y$ este număr impar şi obţinem o contradicţie. În concluzie, nu este posibil ca suma vectorilor din M să fie nulă. **3p**

Concursul de matematică ,,Laurenţiu Panaitopol”
Tulcea, 21 aprilie 2018

Clasa a 10-a

1. Rezolvaţi ecuaţia $\log_2(\log_2(1+\cos 4x))+2\sin x\sin 5x=2^{2^{1+\cos 6x}}$.

Soluţie. Membrul stâng este cel mult $\log_2(\log_2 2)+2=2$, iar membrul drept este cel puţin $2^{2^0}=2$ **2p**

Egalitatea se obţine pentru $\cos 4x=1$, $\sin x\sin 5x=1$ şi $\cos 6x=-1$ **2p**

Cum $2\sin x\sin 5x=\cos 4x-\cos 6x$, soluţiile ecuaţiei sunt soluţiile comune ale ecuaţiilor $\cos 4x=1$, $\cos 6x=-1$, adică $x=\frac{(2n+1)\pi}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.................. **3p**

2. Determinaţi funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care au proprietatea $e^{x+y}\leqslant f(x)f(y)\leqslant f(x+y)$, oricare ar fi numerele reale x şi y.

Soluţie. Pentru $x=y=0$ obţinem $1\leqslant f^2(0)\leqslant f(0)$, deci $f(0)=1$ **2p**

Deducem $e^x\leqslant f(x),\forall x\in\mathbb{R}$ (1).. **2p**

Apoi $f(x)f(-x)\leqslant f(0)=1$ implică $f(x)\leqslant 1/f(-x)\leqslant 1/e^{-x}=e^x$. Combinând cu (1) obţinem $f(x)=e^x,\forall x\in\mathbb{R}$.................................... **3p**

3. Fie a,b numere complexe, astfel încât $|z^2+az+b|\leq 1$, oricare ar fi numărul complex z cu $|z|\leq 1$. Arătaţi că $a=b=0$.

Soluţie. Pentru $z=\pm i$ avem $|b-1\pm ai|\leq 1$, deci $2\geq|b-1+ai|+|b-1-ai|\geq |b-1+ai+b-1-ai|=2|b-1|$, de unde $|b-1|\leq 1$......................... **2p**

Pentru $z=\pm 1$ avem $|b+1\pm a|\leq 1$, de unde, ca mai sus, $|b+1|\leq 1$........ **1p**

Rezultă că b se află în intersecţia discurilor de rază 1, cu centrele în punctele de afixe ± 1, deci $b=0$ **2p**

Obţinem acum $|1\pm a|\leq 1$, de unde $a=0$ **2p**

4. Fie A o mulţime nevidă de numere reale şi $f:A\to A$ o funcţie bijectivă, astfel încât funcţia $g:A\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+f(x)$ este strict crescătoare.

a) Demonstraţi că, dacă mulţimea A este finită, atunci f este funcţia identică.

b) Daţi exemplu de mulţime A şi funcţie care îndeplineşte condiţiile din ipoteză, dar $f(x)\neq x$, oricare ar fi $x\in A$.

Soluţie. a) Raţionăm inductiv, după numărul n al elementelor lui A. Dacă $n=1$ atunci $A=\{a\}$ şi $f(a)=a$, deci $f=1_A$ **1p**

Fie acum $n\geq 2$ şi $x_1<x_2<\ldots<x_n$ elementele lui A. Dacă $f(x_n)\neq x_n$, atunci există p, $1\leq p<n$, astfel încât $f(x_p)=x_n$. Deducem $f(x_k)>x_p+f(x_p)-x_k=x_p+x_n-x_k\geq x_p$ pentru $k>p$. Reiese că mulţimea $\{x_{p+1},x_{p+2},\ldots,x_{n-1}\}$ conţine cele $n-p$ elemente distincte $f(x_{p+1}),f(x_{p+2}),\ldots,f(x_n)$ – fals, deoarece mulţimea are $n-p-1$ elemente. Aşadar presupunerea $f(x_n)\neq x_n$ este falsă, deci $f(x_n)=x_n$. Aplicând acum ipoteza de inducţie pentru funcţia f restricţionată la mulţimea $\{x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}\}$, deducem $f=1_A$ **4p**

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ **2p**

Concursul de Matematică "Laurenţiu Panaitopol"
Tulcea, 21 Aprilie 2018

Enunţuri şi soluţii, Clasa a XI-a

Problema 1. Arătaţi că pentru oricare matrici $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ există numere nenule a, b, c, astfel ca

$$\det(aA + bB + cC) = 0.$$

Soluţie şi barem. Sistemul

$$xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0,$$

unde C_1, C_2 respectiv C_3 sunt primele coloane ale matricilor A, B, C (2 ecuaţii cu 3 necunoscute), are soluţie nebanală. . . . . 3 puncte

Fie a, b, c una dintre aceste soluţii. Aceasta face ca prima coloană a matricei $aA+bB+cC$ să fie 0, deci determinantul ei e 0. . . . . 4 puncte

Problema 2. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{n}$ pentru $n \geq 1$.

a) Arătaţi că şirul are limita infinit;

b) Determinaţi $a > 0$ astfel ca şirul $(\dfrac{x_n}{n^a})_{n\geq 1}$ să fie convergent cu limita finită şi nenulă.

Soluţie şi barem. a) Evident $x_n > 0$ şi deci $x_{n+1} > x_n$, pentru orice n. Prin urmare şirul are limită. Dacă aceasta ar fi finită, să zicem l, prin trecere la limită în relaţia de recurenţă, obţinem $\frac{1}{l} = 0$, absurd. Deci limita este infinită. . . . . 2 puncte

b) Prin ridicare la pătrat, obţinem

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{2x_n}{n} + \frac{2}{nx_n}.$$

. . . . 2 puncte

Cu teroema Stolz-Cesaro deducem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{n} = \lim(x_{n+1}^2 - x_n^2) = \lim(\frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{n^2} + 2 + \frac{2x_n}{n} + \frac{2}{nx_n}).$$

. . . . 3 puncte

Ultima limită este 2 căci tot cu Stolz-Cesaro deducem $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 0$. Aşadar $a = \frac{1}{2}$. . 2 puncte

Problema 3. Matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ satisface relaţia $\det(A^2 + 2019A + 2018I_3) = 2017$. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, matricea $A + nI_3$ este inversabilă.

Soluţie şi barem. Definim $f(x) = \det(A + xI)$, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Funcţia are forma

$$f(x) = \det A + ax + bx^2 + x^3$$

cu $a, b \in \mathbb{Z}$. .... 3 puncte

Dacă prin absurd, există n astfel ca $A + nI_3$ nu e inversabilă, atunci $f(n) = 0$, deci există polinom cu coeficienţi întregi de grad 2, Q, cu $f(x) = (x - n)Q(x)$.

Pe de altă parte avem

$$A^2 + 2019A + 2018I = (A + I)(A + 2018I) = f(1)f(2018).$$

.... 1 punct

Dar $f(1)f(2018) = (1 - n)Q(1)(2018 - n)Q(2018)$. Produsul (1-n)(2018-n) este par, ceea ce contrazice relaţia din ipoteză echivalentă cu $f(1)f(2018) = 2017$. .... 2 puncte

Problema 4. Se consideră numerele reale a, b, c, d cu $a < b, c < d$ şi funcţia $f : [a, b] \to [c, d]$ care are proprietatea Darboux pe $[a, b]$ şi este discontinuă în punctele a şi b.

Să se arate că există α şi β numere reale, $\alpha \neq f(a)$, $\beta \neq f(b)$ astfel încât funcţia $g : [a, b] \to R$,

$g(x) = \begin{cases} \alpha, & x = a \\ f(x), & x \in (a, b) \\ \beta, & x = b \end{cases}$ are proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$.

Soluţie şi barem. Cum f are proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$, rezultă că $f([a, b])$ este interval.

Dacă $f([]a, b])$se reduce la un punct, atunci f este funcţie constantă, de unde f continuă pe $[a, b]$, de unde $f$continuă în a şi b, contradicţie cu ipoteza problemei. Deci $f([a, b]) \subset [c, d]$ are o infinitate de puncte de acumulare care sunt doar numere reale finite (un interval închis inclus în $[c, d]$. .... 1 punct

Dacă $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este şir cu elemente din $[a, b]$, atunci şirul $(f(x_n))_{n \geqslant 1} \subset [c, d]$ este mărginit şi, conform Lemei Cesaro, există un subşir al său convergent. Atunci:

– f discontinuă în $a \quad \Rightarrow \exists (x_n)_{n \geqslant 1} \subset (a, b)$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha \neq f(a)$ deci αeste punct de acumulare pentru $f([a, b])$; (1)

$-f$ discontinuă în $b \Rightarrow \exists (x'_n)_{n \geqslant 1} \subset (a, b)$, $\lim\limits_{n \to \infty} x'_n = b$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} f(x'_n) = \beta$; β este punct de acumulare pentru $f([a, b])$. (2)

.... 1 punct1 punct

Arătăm că funcţia $g : [a, b] \to R$, $g(x) = \begin{cases} \alpha, & x = a \\ f(x), & x \in (a, b) \\ \beta, & x = b \end{cases}$ are proprietatea Darboux pe $[a, b]$. .... 2 puncte

Dacă $a < \alpha_1 < \alpha_2 < b$, atunci $g(x) = f(x)$, $\forall x \in [\alpha_1, \alpha_2]$ şi, cum $f$are proprietatea Darboux pe $[a, b]$, obţinem că pentru orice y dintre $g(\alpha_1)$ şi $g(\alpha_2)$ există $c_y \in (\alpha_1, \alpha_2)$ astfel încât $g(c_y) = y$.

Pentru un interval $[a, \alpha_0]$, $a < \alpha_0 < b$:

- dacă $g(a) < g(\alpha_0)$ şi $y \in (g(a), g(\alpha_0)) = (\alpha, f(\alpha_0))$: din (1) rezultă că există $x_{n_0} \in (a, \alpha_0)$ astfel încât $f(x_{n_0}) < y < f(\alpha_0)$ (dacă $f(x_n) \geqslant y$, $\forall n \geqslant 1,$ atunci $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \geqslant y > \alpha,$ adică $\alpha > \alpha,$

contradicţie) şi, cum $f$are proprietatea Darboux pe $[a, b]$,există $c_y \in (x_{n_0}, \alpha_0)$ astfel încât $f(c_y) = y$, deci există $c_y \in (a, \alpha_0)$ astfel încât $g(c_y) = f(c_y) = y$.

- dacă $g(\alpha_0) < g(a)$ şi $y \in (g(\alpha_0), g(a)) = (f(\alpha_0), \alpha)$: din (1) rezultă că există $x_{n_0} \in (a, \alpha_0)$ astfel

încât $f(\alpha_0) < y < f(x_{n_0})$ (dacă $f(x_n) \leqslant y$, $\forall n \geqslant 1,$ atunci $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \leqslant y < \alpha,$ adică $\alpha < \alpha,$

contradicţie) şi, cum $f$are proprietatea Darboux pe $[a,b]$,există $c_y \in (x_{n_0}, \alpha_0)$ astfel încât $f(c_y) = y$, deci există $c_y \in (a, \alpha_0)$ astfel încât $g(c_y) = f(c_y) = y$.

1 punct

Pentru un interval $[\beta_0, b]$, $a < \beta_0 < b$:

- dacă $g(\beta_0) < g(b)$ şi $y \in (g(\beta_0), g(b)) = (f(\beta_0), \beta)$: din (2) rezultă că există $x'_{n_0} \in (\beta_0, b)$ astfel încât $f(\beta_0) < y < f\left(x'_{n_0}\right)$ (dacă $f(x'_n) \leqslant y$, $\forall n \geqslant 1,$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \leqslant y < \beta,$ adică $\beta < \beta$, contradicţie) şi, cum f are proprietatea Darboux pe $[a,b]$, există $c'_y \in \left(\beta_0, x'_{n_0}\right)$ astfel încât $f\left(c'_y\right) = y$, deci există $c'_y \in (\beta_0, b)$ astfel încât $g\left(c'_y\right) = f\left(c'_y\right) = y$.

- dacă $g(\beta_0) > g(b)$ şi $y \in (g(b), g(\beta_0)) = (\beta, f(\beta_0))$: din (2)rezultă că există $x'_{n_0} \in (\beta_0, b)$ astfel încât $f\left(x'_{n_0}\right) < y < f(\beta_0)$(dacă $f(x'_n) \geqslant y$, $\forall n \geqslant 1,$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \geqslant y > \beta,$ adică $\beta > \beta$, contradicţie) şi, cum $f$are proprietatea Darboux pe $[a,b]$,există $c'_y \in \left(\beta_0, x'_{n_0}\right)$ astfel încât $f\left(c'_y\right) = y$, deci există $c'_y \in (\beta_0, b)$ astfel încât $g\left(c'_y\right) = f\left(c'_y\right) = y$.

Deci funcţia $g$are proprietatea Darboux pe $[a,b]$. 4 puncte

Concursul de Matematică "Laurenţiu Panaitopol"
Tulcea, 21 Aprilie 2018

Enunţuri şi soluţii, Clasa a XII-a

Problema 1. Câte dintre sistemele cu coeficienţi $a, b \in \mathbb{Z}_{12}$ de forma

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= \hat{1} \\ bx + ay + bz &= \hat{2} \\ bx + by + az &= \hat{3} \end{aligned}$$

au soluţii unice?

Soluţie şi barem. Determinantul coeficienţilor în $\mathbb{Z}_{12}$ este $(a + 2b)(a - b)^2$ .... 2 puncte
Acest element trebuie să fie inversabil în $\mathbb{Z}_{12}$ deci să fie $\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}\hat{1}1$ .... 2 puncte
Număratea corectă a perechilor (a, b). 3 puncte

Problema 2. Demonstraţi cî pricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$ polinomul $f = (X - a)^2(X - b)^2 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

Soluţie şi barem. Dacă $f = pq$ cu $p, q \in \mathbb{Z}[X]$ deducem că ambele au gradul 2; altlel ar avea rădăcini reale în contradicţie cu $pq \geq 1$.. 1 punct
Dacă $a \neq b$:
Avem $p(i)q(i) = 1$ pentru $i - a, b$ deducem $p(i) = q(i) = \pm 1$ .... 1 punct
Prin derivare $p(i)q'(i) + p'(i)q(i) = 0$ pentru $i = 1, 2$ .... 1 punct
De aici şi din relaţia precedentă avem că $p'(i) + q'(i) = 0$ pentru $i = a, b$ deci $p' + q' = 0$, adică $p + q = constant = k$ .... 2 puncte
Aşadar $(x - a)^2(x - b)^2 + 1 + p^2 = kp$, o contradicţie cu gradele .... 1 punct
Pentru $a = b$ avem $(X - a)^2 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$ care nu poate fi descompus în factori din $\mathbb{Z}[X]$...1 punct

Problema 3. Fie $f : [0, 1] \to R$ o funcţie continuă pe $[0, 1]$. Să se arate că există un punct $c \in (0, 1)$ astfel încât să avem

$$(c^2 - 3c + 1) \int_0^c f(x)\mathrm{d}x = c(c - 1)f(c)$$

Soluţie şi barem Fie $g : [0, 1] \to R$, g(x)= x(x-1) $e^{1-x} \int_0^x f(t)\, dt$. .... 1 punct
Cum funcţia g este derivabilă [0,1] şi $g(0) = g(1) = 0$, aplicând teorema lui Rolle că există un punct $c \in (0, 1)$ astfel încât $g'(c) = 0$ .... 2 puncte

$$g'(x) = (2x - 1)e^{1-x} \int_0^x f(t)\, dt - x(x - 1)e^{1-x} \int_0^x f(t)\, dt + x(x - 1)e^{1-x} f(x).$$

. . . . 3 puncte

Rezultă

$c(c-1)f(c) = (c^2 - -(1+2)c+1])\int\limits_0^c f(t)dt$, adică rezultatul. .1 punct

Problema 4. . Fie $\mathcal{F}$ clasa funcţiilor continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, astfel încât $\int_0^1 f(x)(1-x)\,\mathrm{d}x \geq 1$. Asociem fiecărei funcţii f din $\mathcal{F}$ funcţia continuă $\bar{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, & 0 < x \leq 1 \\ \\ f(0), & x = 0. \end{cases}$$

Determinaţi valoarea minimă pe care o poate lua $\max_{0\leq x\leq 1} \bar{f}(x)$, când f parcurge clasa $\mathcal{F}$.

Solution. Minimul cerut este 2 obţinut pentru funcţia constantă egală cu 2 pentru $x \in [0,1]$ 1 punct

Fie f din $\mathcal{F}$. Demonstrăm că $M(\bar{f}) = \max_{0\leq x\leq 1} \bar{f}(x) \geq 2$. Considerăm, pentru aceasta $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $0 \leq x \leq 1$. Conform ipotezei, avem succesiv

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int_0^1 f(x)(1-x)\,\mathrm{d}x = F(x)(1-x)\Big|_0^1 + \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x \\ 2\mathit{puncte} \quad &= \int_0^1 x\bar{f}(x)\,\mathrm{d}x \leq M(\bar{f})\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}M(\bar{f}), \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstraţia. . . . . 4 puncte

Pentru o corectă aplicare a formulei de integrale prin părţi dar fără finalizare se acordă în afara celor 2 puncte de la început încă 2 puncte.