Soluții Panaitopol, Tulcea 2023 – clasa a VI-a

1. Numerele întregi a, b, c verifică relațiile $a+b\neq c$, $b+c\neq a$, $c+a\neq b$, $a+b+c\neq 0$ și

$$\frac{a}{b+c-a}=\frac{b}{a+c-b}=\frac{c}{a+b-c}.$$

Determinați valoarea expresiei $(2a-b-c-1)^{2023}+(2b-a-c-1)^{2023}+(2c-a-b-1)^{2023}$.

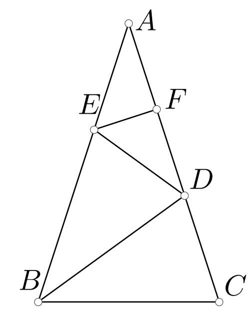
Lucian Petrescu, Tulcea

Soluție. Adunând dublul numărătorului la numitor obținem $\frac{a}{b+c+a}=\frac{b}{a+c+b}=\frac{c}{a+b+c}$, de unde $a=b=c$ **5p**

Expresia cerută este $(-1)^{2023}+(-1)^{2023}+(-1)^{2023}=-3$ **2p**

2. Considerăm triunghiul isoscel ABC, cu $AB=AC$. Bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$ taie latura AC în D, iar mediatoarea segmentului AD taie latura AB în E. Constatăm că DB este bisectoarea unghiului $\widehat{CDE}$. Determinați unghiurile triunghiului ABC.

Constantin Cărbunaru, București



Soluție. Avem $\triangle CBD\equiv\triangle EBD$ (ULU) **2p**

Dacă notăm $\widehat{CBD}=x$, atunci $\widehat{CBE}=2x=\widehat{BCD}=\widehat{BED}$ ... **2p**

Apoi $\widehat{EAD}=\widehat{EDA}=x$ **1p**

Folosind unghiurile din jurul lui D obținem $x+(180-3x)+(180-3x)=180$, $x=36°$, $\widehat{BAC}=36°$, $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=72°$ **2p**

3. Determinați câte numere de 7 cifre au mulțimea cifrelor $\{2,3,4,5,6,7,8\}$ și orice două cifre consecutive sunt numere prime între ele.

Mihail Bălună, București

Soluție. Trebuie să nu existe două cifre consecutive pare, deci cifrele de pe pozițiile 1, 3, 5 și 7 trebuie să fie 2, 4, 6 și 8 .... **1p**

De asemenea, lângă 6 nu poate fi 3 .... **1p**

Pentru un număr care „începe” cu 6, cifra „de lângă” 6 poate fi aleasă în 2 feluri, iar celelalte cifre în $3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1=36$ feluri; analog dacă numărul „se termină” cu 6, deci avem $2\cdot 36+2\cdot 36=144$ de numere de acest tip **2p**

Pentru un număr care are cifra 6 pe locul 3, cifrele „de lângă” 6 pot fi alese în 2 feluri, iar celelalte cifre în $3\cdot 2\cdot 1=6$ feluri; analog dacă cifra 6 este pe locul 5, deci avem $2\cdot 6+2\cdot 6=24$ de numere de acest tip **2p**

În total obținem 168 de numere **1p**

4. Determinați numerele prime pozitive p, q care verifică relația $4p^2-11q^2=2017$.

Lucian Petrescu, Tulcea

Soluție. Dacă $x=\mathcal{M}_3$, atunci $x^2=\mathcal{M}_3$, dacă $x=\mathcal{M}_3+1$, atunci $x^2=\mathcal{M}_3+1^2=\mathcal{M}_3+1$, iar dacă $x=\mathcal{M}_3+2$, atunci $x^2=\mathcal{M}_3+2^2=\mathcal{M}_3+1$, deci la împărțirea cu 3 a unui pătrat perfect se pot obține doar resturile 0 sau 1 (*) **2p**

Restul împărțirii la 3 al lui 2017 este 1, iar restul împărțirii la 3 a expresiei $4p^2-11q^2=(3p^2-12q^2)+(p^2+q^2)$ este același cu restul împărțirii la 3 a expresiei p^2+q^2, deci, ținând cont de (*), unul dintre numerele p, q trebuie să fie $\mathcal{M}_3$ (iar celălalt $\mathcal{M}_3\pm 1$) **3p**

Cum p este prim și $4p^2>2017$, rezultă $q=3$, apoi $p=23$ **2p**

Soluții Panaitopol, Tulcea 2023 – clasa a VII-a

1. Definim mulțimile $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geqslant 0$ și $[\sqrt{a}] = 1\}$ și $B = \{b \in \mathbb{R} \mid b \geqslant 0$ și $[\sqrt{b}] = 2\}$. Determinați mulțimea $C = \{\sqrt{(a+b-5)^2} + \sqrt{(a-b)^2} - 2b \mid a \in A$ și $b \in B\}$.

Lucian Petrescu, Tulcea

Soluție. $a \in A \iff a \geqslant 1$ și $a < 4$ **1p**

$b \in B \iff b \geqslant 4$ și $b < 9$ **1p**

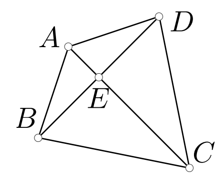
$\sqrt{(a+b-5)^2} + \sqrt{(a-b)^2} = |a+b-5| + |a-b|$ **1p**

$|a+b-5| = a+b-5$ și $|a-b| = b-a$ **2p**

$C = \{-5\}$ **2p**

2. Patrulaterul convex $ABCD$ este împărțit de diagonalele sale în patru triunghiuri asemenea. Arătați că patrulaterul poate fi împărțit în două triunghiuri congruente.

* * *



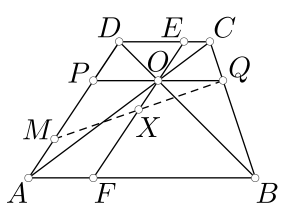
Soluție. Arătăm că diagonalele sunt perpendiculare. În caz contrar avem, de exemplu, $\widehat{AED} > 90° > \widehat{DEC}$, $\widehat{AED} > \widehat{EDC}$ (unghi exterior) și $\widehat{AED} > \widehat{ECD}$ (unghi exterior), deci unghiul $\widehat{AED}$ nu poate avea aceeași măsură cu niciunul dintre unghiurile triunghiului CDE – contradicție cu ipoteza – deci $AC \perp BD$ **2p**

Dacă perechea de unghiuri congruente în triunghiurile ABE și ADE este $(\widehat{BAE}, \widehat{DAE})$, atunci AE este mediatoarea segmentului BD, deci împarte patrulaterul în triunghiurile congruente ABC și ADC. O concluzie similară se obține dacă $\widehat{ADE} \equiv \widehat{CDE}$, $\widehat{DCE} \equiv \widehat{BCE}$ sau $\widehat{ABE} \equiv \widehat{CBE}$ **3p**

În caz contrar avem $\widehat{BAE} \equiv \widehat{ADE} \equiv \widehat{DCE} \equiv \widehat{CBE}$ și $\widehat{ABE} \equiv \widehat{DAE} \equiv \widehat{CDE} \equiv \widehat{BCE}$, ceea ce implică $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ADC} \equiv \widehat{DCB} \equiv \widehat{CBA} = 90°$, deci $ABCD$ este pătrat (dreptunghi cu diagonale perpendiculare), de unde rezultă concluzia **2p**

3. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Prin O se duce paralela la AD, care taie DC în E și AB în F și paralela la AB, care taie AD în P și BC în Q. Pe latura AD se ia punctul M astfel încât $AM = PD$. Arătați că M, Q și mijlocul segmentului EF sunt coliniare.

Gazeta Matematică, *Mihaela Berindeanu*, București



Soluție. Arătăm că $MFQE$ este paralelogram; de aici rezultă că MQ trece prin mijlocul segmentului EF **1p**

Avem $\frac{EC}{ED} = \frac{EC}{AF}$ ($AFED$ paralelogram), $\frac{EC}{AF} = \frac{EO}{OF}$ ($\triangle EOC \sim \triangle FOA$), $\frac{EO}{OF} = \frac{DP}{AP}$ ($AFOP$ și $POED$ paralelograme), $\frac{DP}{AP} = \frac{AM}{DM}$ (ipoteză), deci $\frac{EC}{ED} = \frac{AM}{AD}$, de unde reiese $ME \parallel AC$ **2p**

Cu argumente asemănătoare $\frac{AF}{BF} = \frac{DE}{BF} = \frac{DO}{OB} = \frac{CQ}{QB}$, ceea ce implică $QF \parallel AC$, de unde $ME \parallel QF$ (*) **2p**

Apoi $\frac{ME}{AC} = \frac{DM}{DA} = \frac{AP}{DA} = \frac{BQ}{BC}$ și $\frac{QF}{AC} = \frac{BQ}{BC}$, de unde $ME = QF$ (**) și astfel $MEQF$ este paralelogram **2p**

4. Determinați numerele prime pozitive $a \leqslant b \leqslant c$ pentru care numărul $N = a^4 + b^4 + c^4 - 3$ este prim.

Laurențiu Panaitopol

Soluție. Dacă $a > 2$, atunci N este par și $N > 2$, deci nu este prim. Rezultă $a = 2$ **2p**

Dacă $b \neq 3$ și $c \neq 3$, atunci a^4, b^4 și c^4, fiind pătrate perfecte, dau restul 1 la împărțirea cu 3, deci N este divizibil cu 3 și $N > 3$. Rezultă $b = 3$ sau $c = 3$ **2p**

În sfârșit, dacă $5 \nmid x \in \mathbb{N}$, atunci x^2 dă restul 1 sau 4 la împărțirea cu 5, iar x^4 dă restul 1 la împărțirea cu 5. Astfel, dacă $b \neq 5$ și $c \neq 5$, atunci N este divizibil cu 5. Rezultă $b = 5$ sau $c = 5$ **2p**

Din cele de mai sus rezultă că singura posibilitate este $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, de unde $N = 719$, care convine **1p**

Soluții Panaitopol, Tulcea 2023 – clasa a VIII-a

1. Arătați că, pentru orice numere reale a și b, intervalele $\big[a-|b-1|, a+|b-1|\big]$ și $\big[b-|a-1|, b+|a-1|\big]$ au cel puțin un punct comun.

Mihail Băluna, București

Soluție. Pentru orice a și b, unul dintre capetele primului interval este $a+b-1$ **3p**
Pentru orice a și b, unul dintre capetele celui de-al doilea interval este $a+b-1$ **3p**
Numărul $a+b-1$ este element comun al celor două intervale **1p**

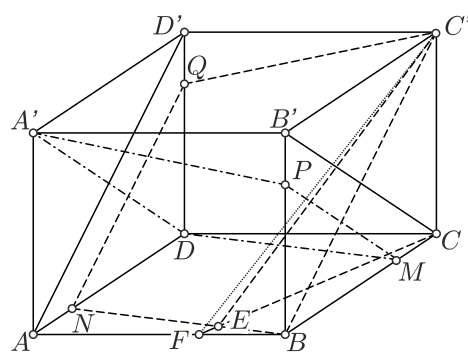
2. Considerăm numerele reale a, b și ecuația $(a^2+1)x^2+(2b-2a+1)x+b^2-2=0$.
a) Determinați a și b dacă ecuația are soluția 3.
b) Demonstrați că, dacă ecuația are soluții reale, atunci ele sunt cel mult 3.

* * *

Soluție. a) Condiția este $9(a^2+1)+3(2b-2a+1)+b^2-2=0$ **1p**
Ea se scrie $(3a-1)^2+(b+3)^2=0$, de unde $a=\frac{1}{3}$, $b=-3$ **2p**
b) Ecuația se scrie $(ax-1)^2+(x+b)^2=3-x$ **2p**
Reiese că orice soluție reală verifică relația $3-x \geqslant 0$, deci $x \leqslant 3$ **2p**

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub și punctele $M \in (BC)$, $N \in (AD)$ astfel încât $AN = CM$. Există o poziție a punctelor M, N pentru care planele $(A'DM)$ și $(BC'N)$ sunt perpendiculare?

Gazeta Matematică, *Traian Preda*, București



Soluție. Din $AN = CM$ reiese $BN \parallel DM$. Fie $MP \parallel CB'$, cu $P \in BB'$ și $NQ \parallel AD'$, cu $Q \in DD'$. Atunci $MP = (BCC'B")\cap(A'DM)$ și $NQ = (ADD'A')\cap(BNC')$ **1p**

Fie $CE \perp BN$, $E \in BN$ și $CE \cap AB = \{F\}$. Din $CC' \perp BN$ și $CE \perp BN$ rezultă $BN \perp (CC'E)$, deci $DM \parallel BN \perp C'F$ (1) **2p**

Avem $B'C \perp (ABC'D')$ (căci $B'C \perp BC'$ și $B'C \perp AB$). Cum $A'D \parallel B'C$ și $C'F \subset (ABC'D')$, reiese că $C'F \perp A'D$. Aceasta, împreună cu (1) arată că $C'F \perp (A'DM)$ (2) **2p**

Dacă planele $(A'DM)$ și $(BC'N)$ ar fi perpendiculare, atunci din (2) ar reieși că $C'F \subset (C'BN)$ – fals, deoarece $F \notin (C'BN)$ **2p**

4. Fie mulțimea $M = \{(a,b) \mid a^2+b \leqslant 2 \text{ și } a+b^2 \leqslant 2\}$. Determinați $\max_{(a,b)\in M}(a^2+b^2)$.

Laurențiu Panaitopol

Soluție. Este știut că $2(a^2+b^2) \geqslant (a+b)^2$ **1p**
Astfel, dacă $(a,b)\in M$, atunci $4 \geqslant a^2+b+b^2+a \geqslant a+b+\frac{1}{2}(a+b)^2$ **1p**
$(a+b)^2+2(a+b)-8 \leqslant 0 \iff (a+b-2)(a+b+4) \leqslant 0 \iff -4 \leqslant a+b \leqslant 2$ **2p**
Reiese că, dacă $(a,b)\in M$, atunci $a^2+b^2 \leqslant 4-(a+b) \leqslant 8$ **2p**
Pentru $(-2,-2)\in M$ avem $(-2)^2+(-2)^2=8$, deci maximul cerut este 8 .... **1p**

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"LAURENȚIU PANAITOPOL"

Tulcea, 1 aprilie 2023

CLASA a 9-a – soluții

Problema 1. Determinați tripletele de numere întregi (a, b, c), cu $a \neq 0$, pentru care graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, intersectează axele de coordonate în trei puncte, care sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

Cătălin Gherghe, București

Soluție. Deoarece graficul funcției f intersectează axele de coordonate în trei puncte, rezultă că ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are două soluții reale distincte $(x_1 < x_2)$. Punctele de intersecție cu axele sunt $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ și $C(0, c)$ **2p**

Cele trei puncte sunt vârfurile unui triunghi echilateral, deci orice vârf se află pe mediatoarea laturii opuse. Rezultă că graficul funcției f este simetric față de axa Oy, adică $x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a} = 0$ și deci $b = 0$. **2p**

Latura triunghiului echilateral este $AB = 2|x_1| = 2x_2$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul OAC obținem $x_1^2 + c^2 = 4x_1^2$, adică $3x_1^2 = c^2$. Dar $ax_1^2 + c = 0$, de unde obținem $x_1^2 = -\frac{c}{a}$ (discriminantul $\Delta = -4ac$ este strict pozitiv, în particular a și c au semne opuse) și deci $ac = -3$. **2p**

Dar a și c sunt numere întregi, deci $a = \pm 1$ și $c = \mp 3$ sau $a = \pm 3$ și $c = \mp 1$.

Există patru triplete $(1, 0, -3)$, $(-1, 0, 3)$, $(3, 0, -1)$ și $(-3, 0, 1)$ **1p**

Problema 2. Determinați numerele prime p și q pentru care $q^p - 1$ divide p^q.

Lucian Petrescu, Tulcea

Soluție. Singura pereche de numere prime care verifică condiția este $(p, q) = (2, 3)$.**1p**

Numerele p și q nu pot satisface simultan condițiile $q \geq 3$ și $p \geq 3$ pentru că, în acest caz, $q^p - 1$ este număr par iar p^q este impar. Deci $p = 2$ sau $q = 2$ **2p**

• Cazul 1: $p = 2$.

Dacă $q = 2$, condiția din ipoteză nu se verifică.

Dacă $q = 3$, rezultă că $8 \mid 8$, deci $(p, q) = (2, 3)$ este soluție **1p**

Dacă $q \geq 5$, deoarece q este prim, el va fi de forma $3n \pm 1$. Rezultă atunci că $q^2 - 1$ este multiplu de 3 și deci nu putem avea divizibilitatea cerută $q^2 - 1 \mid 2^q$ **1p**

• Cazul 2: $q = 2$. Presupunem $p \geq 3$.

Divizibilitatea din ipoteză devine $2^p - 1 \mid p^2$. Evident că $p = 3$ nu convine. Pentru $p \geq 5$ se demonstreză, prin inducție matematică inegalitatea $2^p - 1 > p^2$, deci nu putem avea divizibilitatea cerută **2p**

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care satisfac proprietatea

$$\frac{x^2 + f(x)f(y)}{f(x+y)} = f(x) + f(y) - y,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Traian Tămâian, Gazeta Matematică

Soluție.

Singura funcție care satisface condiția este $f(n) = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Facem notațiile $f(1) = a$ și $f(2) = b$.

Pentru $x = y = 1$ obținem $\frac{1+a^2}{b} = 2a - 1$, de unde $b = \frac{1+a^2}{2a-1}$ **1p**

Egalitatea se rescrie $4b = 2a + 1 + \frac{5}{2a-1}$. Cum $a, b \in \mathbb{N}^*$ rezultă că $a = 1$ și $b = 2$ sau $a = 3$ și $b = 2$ **1p**

Presupunem că $a = 3$ și $b = 2$. Facem $x = 1$ și $y = 2$ și obținem $\frac{1+ab}{f(3)} = a + b - 2$, de unde $\frac{7}{f(3)} = 3$, imposibil pentru că $f(3) \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Deci $f(1) = 1$ și $f(2) = 2$.

Folosind inducția matematică se demonstrează că $f(k) = k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ .. **1p**

Pentru $k = 1$ este adevărat și presupunem că $f(n) = n$. Facem $x = n$ și $y = 1$ în relația inițială și obținem $f(n + 1) = n + 1$ **2p**

Comentariu: Dacă facem $x = y$ și $y = x$ și scădem cele două relații, obținem $f(x+y) = x + y$ pentru orice numere naturale nenule diferite. În particular se obține că $f(n) = n$ pentru orice $n \geq 3$. Pentru acest lucru se acordă **3p**.

Problema 4. Considerăm patrulaterul convex $ABCD$. Fie M și N mijloacele segmentelor BC, respectiv CD. Fie P intersecția dreptelor AM și BN. Dacă $\dfrac{MP}{MA} = \dfrac{1}{5}$ și $\dfrac{BP}{BN} = \dfrac{2}{5}$, determinați natura patrulaterului $ABCD$.

Laurențiu Panaitopol

Soluție.

Arătăm că $ABCD$ este paralelogram. **1p**

Fie $\overrightarrow{PB} = u$, $\overrightarrow{PM} = v$. Atunci $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}$. Din $\dfrac{MP}{MA} = \dfrac{1}{5}$ rezultă $\dfrac{MP}{PA} = \dfrac{1}{4}$ și deci $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{PM} = 4v$. Rezultă $\overrightarrow{AB} = 4v + u$ (1). **2p**

Calculăm acum $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC}$. Din $\dfrac{BP}{BN} = \dfrac{2}{5}$ rezultă $\dfrac{PB}{PN} = \dfrac{2}{3}$ și deci $\overrightarrow{NP} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{PB} = \dfrac{3}{2}u$ și $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PM} = -u + v$.

Deducem că $\overrightarrow{NC} = \dfrac{3}{2}u + v - u + v = 2v + \dfrac{1}{2}u$ și $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{NC} = 4v + u$ (2) **3p**

Din (1) și (2) rezultă că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ deci AB și DC sunt paralele și $AB = DC$, de unde rezultă că $ABCD$ este paralelogram **1p**

A doua soluție Arătăm că $ABCD$ este paralelogram. **1p**

Fie $\{E\} = AN \cap BC$. Teorema lui Menelaus pentru triunghiul AME și secanta $B - P - N$ ne dă $\frac{PA}{PM}\frac{BM}{BE}\frac{NE}{NA} = 1$, de unde $\frac{NE}{NA} = \frac{1}{4} \cdot \frac{BE}{BM}$ **2p**

Analog pentru $\triangle BNE$ și $A-P-M$, $\frac{PB}{PN}\frac{AN}{AE}\frac{ME}{MB}=1$, de unde $\frac{AE}{AN}=\frac{2}{3}\cdot\frac{ME}{MB}$ **2p**
Fie $BM=MC=a>0$, $CE=x\in\mathbb{R}$. Avem $\frac{BE}{BM}=\frac{2a+x}{a}$, $\frac{ME}{MB}=\frac{a+x}{a}$ și $\frac{AE}{AN}-\frac{NE}{NA}=1$, de unde $\frac{2a+2x}{3a}-\frac{x+2a}{4a}=1$. Rezultă $x=2a$, $\frac{AE}{AN}=2=\frac{BE}{BC}$, CN este linie mijlocie în $\triangle ABE$, CD este paralelă și congruentă cu AB, de unde concluzia **2p**

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"LAURENȚIU PANAITOPOL"

Tulcea, 1 aprilie 2023

CLASA a 10-a – soluții

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$12^{2^x} + 15^{2^x} + 16^{2^x} = 5^{4^x}.$$

Mihai Opincariu, Brad

Soluție. Cu notația $2^x = t$, ecuația se rescrie $12^t + 15^t + 16^t = 5^{t^2}$, ... **1p**
care prin împărțire cu 25^t devine $\left(\frac{12}{25}\right)^t + \left(\frac{15}{25}\right)^t + \left(\frac{16}{25}\right)^t = 5^{t^2-2t}$ $(*)$ **1p**
Observăm că $t = 2$ verifică $(*)$, ambii membri fiind egali cu 1 .... **1p**
Definim funcția $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ prin $f(t) = \left(\frac{12}{25}\right)^t + \left(\frac{15}{25}\right)^t + \left(\frac{16}{25}\right)^t$. Funcția f este strict descrescătoare, ca sumă de funcții strict descrescătoare **1p**
Dacă $t > 2$ atunci $f(t) < f(2) = 1$.
Pe de altă parte, dacă $t > 2$, atunci $t^2 - 2t > 0$ și deci $5^{t^2-2t} > 1$ și deci $(*)$ nu poate avea loc. **2p**
Dacă $t \in (0, 2)$ se demonstrează analog că $(*)$ nu poate avea loc. **1p**

Problema 2. Se consideră numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_{2023} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{2023} \cos^2 x_i = 1$. Demonstrați că minimul sumei $\sum\limits_{i=1}^{2023} \operatorname{ctg} x_i$ este egal cu 2.

Cătălin Gherghe, București

Soluție.
Pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2\cos^2 x}{2\cos x \sin x} = \frac{2\cos^2 x}{\sin 2x} \geq 2\cos^2 x,$$

deoarece $0 < \sin 2x \leq 1$. Deci $\operatorname{ctg} x \geq 2\cos^2 x$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Deci $\sum\limits_{i=1}^{2023} \operatorname{ctg} x_i \geq 2 \sum\limits_{i=1}^{2023} \cos^2 x_i \geq 2$ **4p**
Pentru $x_1 = x_2 = \frac{\pi}{4}$ și $x_3 = x_4 = \cdots = x_{2023} = \frac{\pi}{2}$ avem

$$\sum_{i=1}^{2023} \cos^2 x_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 + \cdots + 0 = 1 \text{ și } \sum_{i=1}^{2023} \operatorname{ctg} x_i = 1 + 1 + 0 + \cdots + 0 = 2.$$

Deci minimul sumei este egal cu 2. .... **3p**

Problema 3. Fie mulțimea de numere reale:

$$M = \{\log_2 3, \log_3 4, \log_4 5, \ldots, \log_{2023} 2024\}.$$

a) Demonstrați că $\log_2 3 < \frac{5}{3}$.
b) Demonstrați că $[a + b] = 2$, pentru orice $a, b \in M$, cu $a \neq b$. Am notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x.

Traian Preda, București

Soluție. a) Deoarece $3^3 < 2^5$ rezultă $\log_2 3 < \frac{5}{3}$ **1p**

b) Deoarece $4^3 < 3^4$ rezultă $\log_3 4 < \frac{4}{3}$ și deci $2 < \log_2 3 + \log_3 4 < \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = 3$ de unde rezultă $[\log_2 3 + \log_3 4] = 2$. **2p**

Este adevărată inegalitatea $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$, pentru orice număr $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ **1p**

Inegalitatea se demonstrează observând mai întâi că este echivalentă cu

$$\lg^2(n+1) > \lg n \cdot \lg(n+2)$$

care se rescrie

$$\lg(n+1) > \sqrt{\lg n \cdot \lg(n+2)}.$$

Aplicăm acum inegalitatea mediilor

$$\sqrt{\lg n \cdot \lg(n+2)} < \frac{\lg n + \lg(n+2)}{2} = \frac{\lg(n^2+2n)}{2} < \frac{\lg(n+1)^2}{2} = \lg(n+1).$$

.... **2p**

Avem deci

$$\log_2 3 > \log_3 4 > \cdots > \log_{2023} 2024 > 1.$$

În sfârșit, pentru orice $a, b \in M$, cu $a \neq b$, avem

$$2 < a + b \leq \log_2 3 + \log_3 4 < 3,$$

adică $[a+b] = 2$. **1p**

Problema 4. a) Reprezentați grafic în plan mulțimea punctelor de afix $z \in \mathbb{C}$ pentru care $|z+1| \leq \frac{3}{4}$.

b) Arătați că pentru orice număr complex $z \in \mathbb{C}$ avem $|z+1| > \frac{3}{4}$ sau $|z^2+1| > 1$.

Laurențiu Panaitopol

Soluție. a) Mulțimea punctelor de afix $z \in \mathbb{C}$ pentru care $|z+1| \leq \frac{3}{4}$ este discul $\mathcal{D}$ cu centrul în punctul de coordonate $(-1, 0)$ și rază $\frac{3}{4}$ **1p**

b) Presupunem că $|z+1| \leq \frac{3}{4}$, adică punctele cu aceste afixe se află discul $\mathcal{D}$. Demonstrăm că $|z^2+1| > 1$ **1p**

Se observă că $|z^2+1| = |(z-i)(z-(-i))| = |z-i| \cdot |z-(-i)| = PA \cdot PB$ unde $P(z)$ este orice punct din discul $\mathcal{D}$ iar A și B sunt punctele de afixe i și respectiv $-i$. Echivalent, arătăm că $PA \cdot PB > 1$ **1p**

Minimul produsului $PA \cdot PB$ se realizează pentru puncte P aflate pe cercul $\mathcal{C}$ cu centrul în punctul de coordonate $(-1, 0)$ și rază $\frac{3}{4}$ **1p**

Acest fapt se poate demonstra considerând cercul $\mathcal{E}$ care trece prin punctele A, B și P, unde P este un punct din interiorul discului $\mathcal{D}$. Fie M un punct în care acest cerc intersectează cercul $\mathcal{C}$. Exprimăm aria triunghiului PAB în două moduri și obținem $PA \cdot PB \cdot \sin(\angle APB) = PP' \cdot AB$, unde PP' este înălțimea triunghiului ABP. Este clar că $PA \cdot PB > MA \cdot MB$ când punctul P descrie arcul cercului $\mathcal{E}$ aflat în interiorul cercului $\mathcal{C}$, deoarece unghiul $\angle APB$ este constant. **1p**

În final se arată că $PA \cdot PB > 1$ pentru orice $P \in \mathcal{C}$ **2p**

Ultima inegalitate se poate demonstra direct revenind la calcule obișnuite cu numere complexe sau rescriind în coordonate carteziene condiția (cu notațiile de mai sus) $((PP')^2 + (AP')^2)((PP')^2 + (BP')^2 > 1$.

Comentariu: problema admite și o soluție pur calculatorie. Pentru astfel de abordări se pot acorda și punctaje parțiale:

Presupunem că există $z \in \mathbb{C}$ cu $|z+1| \leq \frac{3}{4}$ și $|z^2+1| \leq 1$. Dacă $z = a + ib$ cu $a, b \in \mathbb{R}$ cele două condiții devin $(a+1)^2 + b^2 \leq \frac{9}{16}$ și respectiv $(a^2 - b^2 + 1)^2 + 4a^2b^2 \leq 1$ **2p**

Inegalitățile de mai sus se rescriu prin $b^2 \leq \frac{9}{16} - (a+1)^2$ (1) și respectiv $b^4 + 2b^2(a^2-1) + 2a^2 + a^4 \leq 0$ (2) **1p**

Considerăm pe (2) ca o inecuație de gradul al 2-lea în b^2. Avem $\Delta = 4(1-4a^2) \geq 0$ și $b^2 \geq 1 - a^2 - \sqrt{1-4a^2}$ (3) **1p**

Din (1) și (3) obținem inecuația $\sqrt{1-4a^2} \geq 2a + \frac{23}{16}$ (3) **1p**
care împreună cu condiția $|a| \leq \frac{1}{2}$ va conduce (după câteva calcule) la o contradicție **2p**

Soluții Panaitopol Tulcea 2023 – clasa a XI-a

Problema 1. Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n = n\left\{\sin 2\pi\sqrt{n^2+1}\right\}$ este convergent și calculați limita sa. *Prin $\{x\}$ s-a notat partea fracționară a numărului real x.*

Soluție. Avem $\sin 2\pi\sqrt{n^2+1} = \sin 2\pi(\sqrt{n^2+1}-n) = \sin\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ **2p**

Pentru $n \geq 5$ avem $\left\{\sin 2\pi\sqrt{n^2+1}\right\} = \sin\frac{2\pi}{n+\sqrt{n^2+1}}$ **1p**

Din $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ deducem $\lim a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin 2\pi/(n+\sqrt{n^2+1})}{2\pi/(n+\sqrt{n^2+1})}\cdot\frac{2n\pi}{n+\sqrt{n^2+1}} = 1\cdot\pi = \pi$......... **4p**

Problema 2. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = B$, $BC = C$, $CA = A$.

a) Arătați că matricele au același rang.

b) Arătați că $A^2 = A$, $B^2 = B$, $C^2 = C$.

Soluție. a) Avem $\text{rang}(B) = \text{rang}(AB) \leq \text{rang}(A) = \text{rang}(CA) \leq \text{rang}(C) = \text{rang}(BC) \leq \text{rang}(B)$, de unde concluzia.. **2p**

b) Avem $(AB)C = BC = C$ și $A(BC) = AC$, deci $AC = C$ **2p**

Rezultă $C(AC) = C^2$ și $(CA)C = AC = C$, deci $C^2 = C$ **2p**

Din simetria circulară a ipotezei obținem și $B^2 = B$, $A^2 = A$ **1p**

Problema 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2B^2 = B^2 - A^2$. Demonstrați că

$$(A + I_n)B^2A = A(A + I_n)B^2.$$

Soluție. Ipoteza implică $A^2B^2 - B^2 + A^2 - I_n = -I_n$, deci $(A^2 - I_n)(B^2 + I_n) = -I_n$. **3p**

De aici $(A + I_n)(B^2 + I_n)(A - I_n) = -I_n$ **3p**

Prin înmulțire și folosirea ipotezei obținem concluzia................................. **1p**

Problema 4. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Arătați că există $c \in (0,1)$ astfel încât

$$|f(c)| \geq 2|2c - 1|.$$

Soluție. Definim $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ prin $g(x) = x(x-1)f(x) + x - \frac{1}{2}$; g este continuă....... **3p**

Avem $g(0) = -\frac{1}{2}$, $g(1) = \frac{1}{2}$ deci, din proprietatea valorilor intermediare, există $c \in (0,1)$ astfel încât $g(c) = 0$ **1p**

De aici $|c - \frac{1}{2}| = |c^2 - c|\,|f(c)|$. Cum funcția $x \in (0,1) \mapsto |x^2 - x|$ are valoarea maximă $\frac{1}{4}$ în punctul $\frac{1}{2}$, reiese că $|f(c)| \geq \frac{|2c-1|/2}{1/4}$, de unde concluzia **3p**

Concursul Panaitopol Tulcea, 1 aprilie 2023 – soluții clasa a XII-a

Problema 1. Fie M un monoid multiplicativ și $x, y, z \in M$ astfel încât $xy = y$, $yz = z$, $zx = x$. Arătați că $x^2 = x$, $y^2 = y$, $z^2 = z$.

Soluție. Avem $(xy)z = yz = z$ și $x(yz) = xz$, deci $xz = z$ **2p**
Rezultă $z(xz) = z^2$ și $(zx)z = xz = z$, deci $z^2 = z$ **3p**
Din simetria circulară a ipotezei obținem și $y^2 = y$, $x^2 = x$ **2p**

Problema 2. Arătați că mulțimea $A = \{m^2 + mn + n^2 \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor naturale.

Soluție. Fie $w \neq 1$ o rădăcină complexă de ordinul 3 a unității. Atunci $m^2 + mn + n^2 = (m - wn)(m - \overline{w}n)$ **2p**
Pentru $a = m^2 + mn + n^2$, $b = p^2 + pq + q^2$, cu $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ rezultă $ab = (m - wn)(p - wq)(m - \overline{w}n)(p - \overline{w}q)$. Dar $(m - wn)(p - wq) = mp - w(np + mq) + w^2nq = mp - w(np + mq) - (w + 1)nq = (mp - nq) - w(np + mq + nq)$ **2p**
Analog $(m - \overline{w}n)(p - \overline{w}q) = (mp - nq) - \overline{w}(np + mq + nq)$ **1p**
Obținem $ab = (mp - nq)^2 + (mn - pq)(np + mq + nq) + (np + mq + nq)^2 \in A$......... **2p**

Problema 3. Fie $f : [0, 1] \to [0, \infty)$ o funcție continuă astfel încât

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Arătați că există $a, b, c \in (0, 1)$ astfel încât

$$3 \leq e^a f(a) + e^b f(b) + e^c f(c) \leq 3e.$$

Soluție. Pe $[0, 1]$ avem $1 \leq e^x \leq e$, deci $f(x) \leq e^x f(x) \leq ef(x)$ **1p**
Prin integrare, $1 \leq \int\limits_0^1 e^x f(x)\mathrm{d}x \leq e$ **1p**
Deoarece $\int\limits_0^1 e^x f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{1/3} e^x f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{1/3}^{2/3} e^x f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{2/3}^1 e^x f(x)\mathrm{d}x$ și din teorema de medie avem $\int\limits_a^b e^x f(x)\mathrm{d}x = (b - a)e^c f(c)$, obținem concluzia.. **5p**

Problema 4. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \sqrt[n]{x^n + (1 - x)^n}\,\mathrm{d}\,x$.

Soluție. Fie $I_n = \int\limits_0^1 \sqrt[n]{x^n + (1 - x)^n}\mathrm{d}x$. Cu schimbarea de variabilă $t = \frac{1}{2} - x$ obținem $I_n = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} - t\right)^n + \left(\frac{1}{2} + t\right)^n}\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^{1/2} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} - t\right)^n + \left(\frac{1}{2} + t\right)^n}\,\mathrm{d}x$ **3p**
Avem $\left(\frac{1}{2} + t\right)^n \leq \left(\frac{1}{2} - t\right)^n + \left(\frac{1}{2} + t\right)^n \leq 2\left(\frac{1}{2} + t\right)^n$ **2p**
Rezultă $2\int\limits_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} + t\right)\mathrm{d}t \leq I_n \leq 2\sqrt[n]{2}\int\limits_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} + t\right)\mathrm{d}t$.
Cum $\int\limits_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} + t\right)\mathrm{d}t = \frac{3}{8}$, obținem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \frac{3}{4}$ **2p**