Concursul Interjudețean de Matematică „Laurențiu Panaitopol”

Tulcea, 1 aprilie 2023

Clasa a VI-a

Problema 1. Numerele întregi a, b, c verifică relațiile $a+b \neq c$, $b+c \neq a$, $c+a \neq b$, $a+b+c \neq 0$ și

$$\frac{a}{b+c-a} = \frac{b}{a+c-b} = \frac{c}{a+b-c}.$$

Determinați valoarea expresiei

$$(2a-b-c-1)^{2023} + (2b-a-c-1)^{2023} + (2c-a-b-1)^{2023}.$$

Problema 2. Considerăm triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$. Bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$ taie latura AC în D, iar mediatoarea segmentului AD taie latura AB în E. Constatăm că DB este bisectoarea unghiului $\widehat{CDE}$. Determinați unghiurile triunghiului ABC.

3. Determinați câte numere de 7 cifre au mulțimea cifrelor $\{2,3,4,5,6,7,8\}$ și orice două cifre consecutive sunt numere prime între ele.

4. Determinați numerele prime pozitive p, q care verifică relația

$$4p^2 - 11q^2 = 2017.$$

Concursul Interjudețean de Matematică „Laurențiu Panaitopol”
Tulcea, 1 aprilie 2023

Clasa a VII-a

1. Definim mulțimile

$$A = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geqslant 0 \text{ și } [\sqrt{a}] = 1\}, \quad B = \{b \in \mathbb{R} \mid b \geqslant 0 \text{ și } [\sqrt{b}] = 2\}.$$

Determinați mulțimea

$$C = \{\sqrt{(a+b-5)^2} + \sqrt{(a-b)^2} - 2b \mid a \in A \text{ și } b \in B\}.$$

2. Patrulaterul convex $ABCD$ este împărțit de diagonalele sale în patru triunghiuri asemenea. Arătați că patrulaterul poate fi împărțit în două triunghiuri congruente.

3. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Prin O se duce paralela la AD, care taie DC în E și AB în F și paralela la AB, care taie AD în P și BC în Q. Pe latura AD se ia punctul M astfel încât $AM = PD$. Arătați că M, Q și mijlocul segmentului EF sunt coliniare.

4. Determinați numerele prime pozitive $a \leqslant b \leqslant c$ pentru care numărul

$$N = a^4 + b^4 + c^4 - 3$$

este prim.

Concursul Interjudețean de Matematică ,,Laurențiu Panaitopol”
Tulcea, 1 aprilie 2023

Clasa a VIII-a

1. Arătați că, pentru orice numere reale a și b, intervalele

$$\big[a-|b-1|, a+|b-1|\big] \quad \text{și} \quad \big[b-|a-1|, b+|a-1|\big]$$

au cel puțin un punct comun.

2. Considerăm numerele reale a, b și ecuația

$$(a^2+1)x^2+(2b-2a+1)x+b^2-2=0.$$

a) Determinați a și b dacă ecuația are soluția 3.

b) Demonstrați că, dacă ecuația are soluții reale, atunci ele sunt cel mult 3.

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub și punctele $M \in (BC)$, $N \in (AD)$ astfel încât $AN = CM$. Există o poziție a punctelor M, N pentru care planele $(A'DM)$ și $(BC'N)$ sunt perpendiculare?

4. Fie mulțimea

$$M = \{(a,b) \mid a^2+b \leqslant 2 \text{ și } a+b^2 \leqslant 2\}.$$

Determinați

$$\max_{(a,b)\in M} (a^2+b^2).$$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
”LAURENȚIU PANAITOPOL”

Tulcea, 1 aprilie 2023

CLASA a IX-a

Problema 1. Determinați tripletele de numere întregi (a, b, c), cu $a \neq 0$, pentru care graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, intersectează axele de coordonate în trei puncte, care sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

Problema 2. Determinați numerele prime p și q pentru care $q^p - 1$ divide p^q.

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care satisfac proprietatea

$$\frac{x^2 + f(x)f(y)}{f(x+y)} = f(x) + f(y) - y,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Problema 4. Considerăm patrulaterul convex $ABCD$. Fie M și N mijloacele segmentelor BC, respectiv CD. Fie P intersecția dreptelor AM și BN. Dacă $\frac{MP}{MA} = \frac{1}{5}$ și $\frac{BP}{BN} = \frac{2}{5}$, determinați natura patrulaterului $ABCD$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"LAURENȚIU PANAITOPOL"

Tulcea, 1 aprilie 2023

CLASA a X-a

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$12^{2^x}+15^{2^x}+16^{2^x}=5^{4^x}.$$

Problema 2. Se consideră numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_{2023} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{2023} \cos^2 x_i = 1$. Demonstrați că minimul sumei $\sum\limits_{i=1}^{2023} \operatorname{ctg} x_i$ este egal cu 2.

Problema 3. Fie mulțimea de numere reale:

$$M=\{\log_2 3, \log_3 4, \log_4 5, \ldots, \log_{2023} 2024\}.$$

a) Demonstrați că $\log_2 3 < \frac{5}{3}$.
b) Demonstrați că $[a+b]=2$, pentru orice $a, b \in M$, cu $a \neq b$. Am notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x.

Problema 4. a) Reprezentați grafic în plan mulțimea punctelor de afix $z \in \mathbb{C}$ pentru care $|z+1| \leq \frac{3}{4}$.
b) Arătați că pentru orice număr complex $z \in \mathbb{C}$ avem $|z+1| > \frac{3}{4}$ sau $|z^2+1| > 1$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Concursul Interjudețean de Matematică ,,Laurențiu Panaitopol"
Tulcea, 1 aprilie 2023

Clasa a XI-a

Problema 1. Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n = n\big\{\sin 2\pi\sqrt{n^2+1}\big\}$ este convergent și calculați limita sa.

Prin $\{x\}$ s-a notat partea fracționară a numărului real x.

Problema 2. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = B$, $BC = C$, $CA = A$.

a) Arătați că matricele au același rang.

b) Arătați că $A^2 = A$, $B^2 = B$, $C^2 = C$.

Problema 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2B^2 = B^2 - A^2$. Demonstrați că

$$(A + I_n)B^2A = A(A + I_n)B^2.$$

Problema 4. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Arătați că există $c \in (0, 1)$ astfel încât

$$|f(c)| \geq 2|2c - 1|.$$

Concursul Interjudețean de Matematică „Laurențiu Panaitopol"

Tulcea, 1 aprilie 2023

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie M un monoid multiplicativ și $x, y, z \in M$ astfel încât $xy = y$, $yz = z$, $zx = x$. Arătați că $x^2 = x$, $y^2 = y$, $z^2 = z$.

Problema 2. Arătați că mulțimea $A = \{m^2 + mn + n^2 \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor naturale.

Problema 3. Fie $f : [0, 1] \to [0, \infty)$ o funcție continuă astfel încât

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Arătați că există $a, b, c \in (0, 1)$ astfel încât

$$3 \leq e^a f(a) + e^b f(b) + e^c f(c) \leq 3e.$$

Problema 4. Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt[n]{x^n + (1-x)^n}\mathrm{d}x.$$