CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIŢIA a VIII-a, TULCEA, 2 aprilie 2016

Clasa a VII - a

Soluţii orientative şi bareme

Problema 1.

1. a) Determinați numerele naturale nenule n care au proprietatea că d^2+1 este număr prim pentru orice divizor d al lui n.

b) Determinați numerele naturale nenule n care au proprietatea că d^2+2 este număr prim pentru orice divizor d al lui n.

***

a) Avem $n=2^a\cdot q$ unde $a\in\mathbb{N}$ şi impar, Dacă $q>1$, atunci q^2+1 este par şi mai mare decât 2. Cum $q\mid n$ ajungem la contradicţie. Deducem că $n=2^a$.	**2p**
Pentru $a\in\{0,1,2\}$, obţinem $n\in\{1,2,4\}$. Pentru $a\geq 3$, numărul 2^a se divide cu 8. Cum $8^2+1=65$ nu este prim, nu mai avem soluţii.	**1p**
b) Numărul n este impar, deci este de forma $n=3^b\cdot p$, unde $b\in\mathbb{N}$, iar p este un număr impar nedivizibil cu 3. Dacă $p>1$, atunci $p^2+1>3$ şi se divide cu 3, fapt care nu convine cerinţei. Deducem că $n=3^b$. Pentru $b\in\{0,1,2\}$, obţinem $n\in\{1,3,9\}$..	**2p**
Pentru $b\geq 3$, numărul 3^b se divide cu 27, iar $27^2+2=731=17\cdot 43$, deci nu mai avem soluţii.	**2p**

Problema 2.

Demonstraţi că dacă $a=\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{4n\text{ cifre}}$ și $b=\underbrace{\overline{33\ldots3}}_{2n\text{ cifre}}$, atunci numărul $N=a+6b+4$ este pătrat perfect.

Prof. Tanța Costea

Observăm că $a=10^{4n}-1$, iar $3b=10^{2n}-1$	**3p**
Atunci $N=10^{4n}-1+2\cdot 10^{2n}-2+4=\left(10^{2n}+1\right)^2$	**4p**

Problema 3.

Pentru fiecare $k\in\mathbb{N}^*$ definim numerele $a_k=2k+(-1)^k\cdot\dfrac{1+2+3+\ldots+2k}{\sqrt{1+3+5+\ldots+(2k-1)}}$ şi

$S_k=a_1+a_2+\ldots+a_{2k}$

a) Arătaţi că $S_1=8$;

b) Determinaţi $k\in\mathbb{N}^*$ pentru care numărul S_k este divizor al lui 2016.

Prof. Tanța Costea

a) Avem $\sqrt{1+3+5+\ldots+(2k-1)}=\sqrt{k^2}=k$, iar $1+2+3+\ldots+2k=k(2k+1)$	**1p**
Obţinem $a_k=\begin{cases}-1, k \text{ impar}\\ 4k+1, k \text{ par}\end{cases}$	**1p**
$S_1=a_1+a_2=-1+9=8$	**1p**
b) $S_k=4k(k+1)$	**2p**
$4k(k+1) \mid 2016$ rezultă $k\in\{1,2,3,6,7,8\}$	**2p**

Problema 4.
Se consideră triunghiul ascuţitunghic *ABC* și *D* piciorul ânălțimii din *A*. Punctul *M* este situat pe segmentul (AD) astfel încât $\frac{AM}{DM}=\frac{CD}{BD}$. Arătaţi că, dacă *N* este piciorul perpendicularei din *D* pe *BM*, atunci $AN\perp NC$.

elevă Ana Maria Radu, 2013

Fie *P* punctul de intersecţie a paralelei prin *A* la dreapta *BC* cu dreapta *BM*. Triunghiurile *AMP* şi *DMP* sunt asemenea, deci $\frac{AM}{MD}=\frac{AP}{BD}$. Cum $\frac{AM}{DM}=\frac{CD}{BD}$, rezultă că $AP=CD$	**3p**
Deducem că patrulaterul *ADCP* este dreptunghi.	**2p**
Fie $\{O\}=AC\cap DP$. Avem $NO=\frac{PD}{2}=\frac{AC}{2}$. Cum $[ND]$ este mediană în triunghiul *ANC*, deducem că $AN\perp NC$.	**2p**

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIŢIA a VIII-A, TULCEA, 2aprilie 2016

Soluţii orientative şi bareme

Clasa a VIII-a

Problema 1.

1. Determinați numerele naturale nenule *n* care au *k* divizori naturali, $d_1, d_2, ..., d_k$, $k \geq 4$, cu $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$, ştiind că $d_i + d_{i+1} + d_{i+2} = d_{i+3}$ pentru oricare $i = \overline{1, k-3}$.

Lucian Petrescu, Mircea Fianu

Fie 1, *x*, *y* şi *z* primii cei mai mici divizori ai lui *n*. Atunci numerele $\frac{n}{z}, \frac{n}{y}, \frac{n}{x}$ şi *n* sunt, în ordine cei mai mari divizori ai lui *n*. Prin urmare $\frac{n}{z} + \frac{n}{y} + \frac{n}{x} = n$, echivalent cu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.	**2p**
Obţinem $x = 2, y = 3, z = 6$. Deducem că *n* se divide cu 6 .	**3p**
Dacă $n > 6$, atunci numărul $2+3+6=11$ îl divide pe n şi cum *n* se divide cu 2, înseamnă că $n \geq 22$. Înseamnă că numărul $3+6+11=20$ îl divide pe *n*. Ca urmare 4 îl divide pe *n*. Contradicţie, căci $3<4<6$. Rezultă $n=6$	**2p**

Problema 2.

Arătați că, dacă $x, y > 0$ și $x + y = 1$, atunci au loc inegalităţile:

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{x^2 + y} + \sqrt{x + y^2} < 2.$$

Lucian Petrescu

Avem $\left[E(x,y)\right]^2 = \left(\sqrt{x^2+y} + \sqrt{x+y^2}\right)^2 = x^2 + y^2 + x + y + 2\sqrt{x^3 + y^3 + xy + x^2y^2}$, echivalent cu $\left[E(x,y)\right]^2 = 1 + (x+y)^2 - 2xy + 2\sqrt{1 - 2xy + x^2y^2}$ sau $\left[E(x,y)\right]^2 = 2(1-xy) + 2(1-xy) = 4(1-xy) < 4$, deoarece $xy < 1$.	**3p**
.Pe de altă parte, din inegalitatea mediilor, obţinem $xy \leq \frac{1}{4}$, deci Obţinem $3 \leq E(x,y)^2 < 4$, de unde rezultă concluzia.	**4p**

Problema 3.

Să se determine numerele naturale nenule *a*, *b* , *c* şi *d*, $a < b < c < d$, care verifică simultan egalităţile $a + b + c = d$ şi $a^3 + b^3 + c^3 = d^2$.

Lucian Petrescu, Mircea Fianu

Avem $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^2 < 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$	**2p**
Dacă $a \geq 3$, atunci $a^3 + b^3 + c^3 > 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, rezultă $a \leq 2$.	**1p**

Pe de altă parte, $d^2 = a^3 + b^3 + c^3 > \frac{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3} = \frac{d}{3} \cdot \left(a^2+b^2+c^2\right)$	**2p**
Deci $3d > a^2 + b^2 + c^2$. Dar $a^2 + b^2 + c^2 > \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{d^2}{3}$. Obţinem $d < 9$, adică $d \le 8$.	**2p**
Dacă $a = 2$ şi $d \le 8$, atunci $b + c \le 6$, contradicţie.	
Dacă $a = 1$, obţinem $b = 2$ şi $c = 3$.	

Problema 4.
Se consideră o prismă dreaptă $A_1A_2...A_nA_1'A_2'...A_n'$, $n \ge 3$, având baza un poligon regulat. Se ştie că $m\left(A_1A_2', A_2A_3'\right) = m\left(A_1A_2', A_2'A_3\right)$.

a) Arătaţi că $n = 4$;

b) Dacă $m\left(A_2A_3', A_2'A_3\right) = 60^\circ$ şi $A_1A_2 = a$, exprimaţi volumul prismei.

Mircea Fianu

a) Fie *P* simetricul punctului A_3 în raport cu A_2 . Triunghiurile $A_1A_2'A_3$ şi $A_1A_2'P$ sunt congruente, deci $A_1A_3 = A_1P$. Cum $A_2P = A_2A_3$, rezultă că $A_1A_2 \perp PA_3$. Deducem că paza prismei este pătrat.	**3p**
b) Se consider cazurile : $m\left(A_2OA_3\right) = 60^\circ$ şi $m\left(A_2OA_3\right) = 120^\circ$	**4p**

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ „LAURENŢIU PANAITOPOL”

TULCEA, 2 APRILIE 2016

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE

Clasa a IX-a

Problema 1. Considerăm mulţimea $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{[x]}{\{x\}} = n\right\}$, cu n număr natural.

a) Determinaţi A_3.
b) Arătaţi că A_n este infinită dacă şi numai dacă $n = 0$.

Pepino Dincă, Caracal

Soluţie. **a)** Dacă $x \in A_3$, atunci $[x] = 3\{x\}$ şi, cum $0 \leqslant \{x\} < 1$, rezultă că $[x] \in [0, 3)$, deci $[x] \in \{0, 1, 2\}$ **2p**

Cum $\{x\} \neq 0$, se obţine $A_3 = \left\{\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right\}$ **1p**

b) Dacă $n \neq 0$, se obţine $A_n = \left\{ \frac{k(n+1)}{n} \;\middle|\; k \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \right\}$ **2p**

Pentru $n = 0$, avem $A_0 = (0, 1)$, de unde concluzia **2p**

Problema 2. Fie $ABCD$ un patrulater convex, cu $\{O\} = AC \cap BD$, şi punctele $M \in (AD)$, $N \in (BC)$ astfel încât $\frac{MA}{MD} = \frac{NC}{NB}$.

a) Arătaţi că dacă $O \in MN$, atunci $AD \parallel BC$ ($ABCD$ este trapez sau paralelogram).

b) Arătaţi că dacă O este mijlocul segmentului $[MN]$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Adrian Stroe, Caracal

Soluţie. **a)** Notând $\frac{MA}{MD} = \frac{NC}{NB} = k > 0$, rezultă $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{OD}$ şi $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{OC} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{OB}$ **2p**

Deoarece vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OC}$ sunt coliniari, există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{OA} = a\,\overrightarrow{OC}$şi, similar, există $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{OD} = b\,\overrightarrow{OB}$ **1p**

Atunci $\overrightarrow{OM} = \frac{a}{1+k}\overrightarrow{OC} + \frac{b}{1+k}\overrightarrow{OB}$ şi, din proporţionalitatea coordonatelor vectorilor coliniari $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{ON}$ descompuşi în funcţie de vectorii $\overrightarrow{OC}$ şi $\overrightarrow{OB}$, rezultă $a = b$ **1p**

De aici obţinem $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = a\,\overrightarrow{OB} - a\,\overrightarrow{OC} = a\,\overrightarrow{CB}$, deci $AD \parallel BC$ **1p**

b) Dacă O este mijlocul lui $[MN]$, atunci $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{ON}$ şi, egalând coordonatele vectorilor $\overrightarrow{OM}$ şi $-\overrightarrow{ON}$ (vezi exprimările de mai sus), rezultă $a = b = -1$ **1p**

Ca urmare, $\overrightarrow{OA} = -\,\overrightarrow{OC}$ şi $\overrightarrow{OD} = -\,\overrightarrow{OB}$, deci O este mijlocul diagonalelor $[AC]$ şi $[BD]$, adică patrulaterul $ABCD$ este paralelogram **1p**

Problema 3. Dacă a, b sunt numere reale pozitive cu $a+b=1$, arătaţi că

$$7\left(a^4+b^4\right)-4\left(a^7+b^7\right)\geqslant\frac{13}{16}.$$

Marius Perianu, Slatina

Soluţie. Deoarece $(a^4+b^4)(a^3+b^3)=a^7+b^7+a^3b^3(a+b)$, inegalitatea de demonstrat se rescrie $(a^4+b^4)(7-4(a^3+b^3))+4a^3b^3\geqslant\frac{13}{16}$ **1p**

Notând $ab=p$, avem $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=1-3p$ şi, deoarece $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2p$, rezultă şi $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=1-4p+2p^2$ **2p**

Aşadar, să arătăm că $(1-4p+2p^2)(3+12p)+4p^3\geqslant\frac{13}{16}$, echivalent cu $4p^3-6p^2+\frac{5}{16}\geqslant 0$, adică $\left(p-\frac{1}{4}\right)\left(4p^2-5p-\frac{5}{4}\right)\geqslant 0$ **2p**

Deoarece $0<p=ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}<1$, rezultă că $4p^2<4p<5p<5p+\frac{5}{4}$, deci $p-\frac{1}{4}\leqslant 0$ şi $4p^2-5p-\frac{5}{4}\leqslant 0$, de unde concluzia **2p**

Problema 4. Determinaţi termenul general al şirului de numere naturale nenule $(a_n)_{n\geqslant 1}$, ştiind că a_1 este impar şi că are loc relaţia $\dfrac{a_n^2}{2n+a_n}-\dfrac{n}{a_n}=\dfrac{a_{n+1}-4}{3}$, pentru orice număr natural $n\geqslant 1$.

Pepino Dincă, Caracal

Soluţie. Din ipoteză obţinem $a_{n+1}=4+\dfrac{3a_n^3-3na_n-6n^2}{a_n(2n+a_n)}$, pentru orice număr natural $n\geqslant 1$ **1p**

Cum $a_2\in\mathbb{N}$, rezultă că $a_1\mid 3a_1^3-3a_1-6$, deci $a_1\mid 6$ **2p**

Dar a_1 este impar, deci $a_1=1$, pentru care se obţine $a_2=2\in\mathbb{N}$, sau $a_1=3$, pentru care $a_2\notin\mathbb{N}$ **2p**

Aşadar $a_1=1$, $a_2=2$ şi, prin inducţie, se arată că $a_n=n$, pentru orice număr natural $n\geqslant 1$ **2p**

Clasa a 10-a

Problema 1. Fie r o rădăcină complexă a ecuaţiei $z^2+z+1=0$ şi a, b, c trei numere complexe nenule care au acelaşi modul şi verifică relaţia $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3r$.

Demonstraţi că $a^{2016}=b^{2016}=c^{2016}$.

Soluţie. Avem $|a/b|=|b/c|=|c/a|=1$ şi $|a/b|+|b/c|+|c/a|=3|r|=3$ **2p**

Deoarece suma modulelor unor numere complexe este egală cu modulul sumei lor dacă şi numai dacă ele corespund unor vectori cu aceeaşi direcţie şi $|a/b|=|b/c|=|c/a|$, rezultă $a/b=b/c=c/a$ **3p**

Astfel $a=br=cr^2$, iar din $r^{2016}=1$ rezultă concluzia **2p**

Altă soluţie. Luând conjugate obţinem $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=3\bar{r}=3r^2$ **2p**

Prin adunare rezultă $\sum_{\text{sim}}\frac{a}{b}=-3$, deci $\sum_{\text{sim}}a^2b=-3abc$, sau $\sum a\sum ab=0$, adică $\sum a\sum\frac{1}{a}=0$ **3p**

Rezultă că a,b,c sau $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral cu centrul în origine, deci $a^3=b^3=c^3$, de unde concluzia **2p**

Problema 2. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x^{\log_{16}x}=4-8x$.

Soluţie. Observăm că ecuaţia are soluţia $\frac{1}{4}$ **2p**

Notând $\log_{16}x=y$, ecuaţia se scrie $16^{y^2}+8\cdot 16^y=4$ **2p**

Dar $2^{4y^2}+2^{4y+3}\geq 2\sqrt{2^{4y^2+4y+3}}\geq 2\sqrt{2^2}=4$, cu egalitate numai dacă $y=-\frac{1}{2}$, adică $x=\frac{1}{4}$ **3p**

Problema 3. Fie p, m, n numere naturale nenule, cu $m\leq n$. Determinaţi numărul $p-$uplurilor de mulţimi $(X_1,X_2,\ldots,X_p)$ care verifică simultan relaţiile:

i) $X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_p=\{1,2,\ldots,n\}$;

ii) mulţimea $X_1\cap X_2\cap\ldots\cap X_p$ are m elemente.

Soluţie. Cele m elemente comune pot fi alese în C_n^m moduri **2p**

Fiecare dintre cele $n-m$ elemente rămase poate fi distribuit în cele p mulţimi, astfel încât să apară în cel puţin o mulţime, dar nu în toate, în 2^p-2 moduri **3p**

Numărul cerut este $(2^p-2)^{n-m}C_n^m$ **2p**

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater convex, $\mathcal{P}$ perimetrul său şi G centrul său de greutate (punctul al cărui afix g verifică relaţia $4g=a+b+c+d$, unde a, b, c, d sunt afixele vârfurilor A, B, C, respectiv D).

a) Arătaţi că $GA+GB+GC+GD<\mathcal{P}$.

b) Arătaţi că, dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $MA+MB+MC+MD<\mathcal{P}$, pentru orice punct M din interiorul lui $ABCD$.

Soluţie. a) $GA=|g-a|=\frac{1}{4}|b+c+d-3a|<\frac{1}{4}(|b-a|+|c-a|+|d-a|)<\frac{1}{4}(2|b-a|+|c-b|+|d-a|)=\frac{1}{4}(2AB+BC+AD)$; prin adunare cu analoagele obţinem concluzia cerută **4p**

b) Observăm că, dacă T este un punct al suprafeţei triunghiulare $[XYZ]$, diferit de vârfuri şi $\{T'\}=YT\cap XZ$, atunci $TY+TZ\leq T'Y+T'Z<XY+XZ$ **1p**

Deoarece M aparţine uneia dintre suprafeţele triunghiulare $[ABC]$, $[ADC]$ rezultă $MA+MC<AB+BC$, analog $MB+MD<AB+BC$, de unde concluzia **2p**

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ

,,LAURENŢIU PANAITOPOL"

TULCEA, 2 APRILIE 2016

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE

Clasa a XI-a

Problema 2. a) Daţi exemplu de o matrice $A \in \mathcal{M}_4(\{0,1\})$, care verifică relaţia $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Arătaţi că dacă $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi există $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, astfel încât $X^2 = J$, atunci n este pătrat perfect.

Soluţie. **a)** Considerăm de exemplu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **2p**

b) Cum $J^2 = nJ$, orice valoare proprie a matricei J verifică ecuaţia $\lambda^2 = n\lambda$, deci $\lambda \in \{0, n\}$ **1p**

Apoi cum $tr\,(J) = n$ şi $tr\,(J) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$, unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei J, rezultă că $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = n$, care conduce la $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{\cdot n-1} = 0$ şi $\lambda_n = n$ **2p**

Dacă $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sunt valorile proprii ale matricei X, rezultă că matricea X^2 are valorile proprii $\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2$. Deoarece $X^2 = J$, avem că $\mu_1 = \ldots = \mu_{n-1} = 0$, iar $\mu_n \in \{\pm\sqrt{n}\}$. Dar $tr\,(X) = \mu_1 + \ldots + \mu_n \in \{\pm\sqrt{n}\}$, iar $tr(X) \in \mathbb{Q}$, deoarece $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$. Rezultă $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, deci n este pătrat perfect **2p**

Problema 2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $A^2 = O_2$. Arătaţi că pentru orice matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ au loc inegalităţile $\det(AB - BA) \leqslant 0 \leqslant \det(AB + BA)$

Soluţie. Folosind faptul că $\det(A + xB) = \det A + (\mathrm{Tr}A \cdot \mathrm{Tr}B - \mathrm{Tr}(AB)) \cdot x + (\det B) \cdot x^2$ obţinem $\det(AB + xBA) = \det(AB) + (\mathrm{Tr}(AB) \cdot \mathrm{Tr}(BA) - \mathrm{Tr}(AB \cdot BA)) \cdot x + \det(BA) \cdot x^2 = \det(AB) + \left[(\mathrm{Tr}(AB))^2 - \mathrm{Tr}(A^2B^2)\right] \cdot x + \det(BA) \cdot x^2 = \det(AB) + (\mathrm{Tr}(AB))^2 \cdot x + \det(BA) \cdot x^2$ **4p**

$A^2 = O_2 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow \det(AB) = \det A \cdot \det B = 0$ **1p**

$x = -1 \Rightarrow \det(AB - BA) = 2\det(AB) - (Tr(AB))^2 = -(Tr(AB))^2 \leqslant 0$ **1p**

$x = 1 \Rightarrow \det(AB + BA) = 2\det(AB) + (Tr(AB))^2 = (Tr(AB))^2 \geqslant 0$ **1p**

Problema 3. Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un şir convergent de numere reale pozitive. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+a_k}$

Florian Dumitrel, Slatina

Soluţie. Fie $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Notăm $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+a_k}$ şi $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+a}$. Avem $b_n=\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+a)}\to\dfrac{1}{2}$ **2p**

Şirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent, deci există $M>0$ astfel încât $|a_n|\leqslant M$ pentru orice $n\geqslant 1$. Prin urmare, $|a_k-a|\leqslant |a_k|+|a|\leqslant M+a$ pentru orice $k\geqslant 1$ **1p**

Deoarece $|a_n-b_n|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k\,|a_k-a|}{(n^2+a_k)(n^2+a_k)}\leqslant\dfrac{M+a}{n^4}\sum\limits_{k=1}^{n}k=(M+a)\dfrac{n+1}{2n^3}\to 0$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ **3p**

Din relaţia $a_n=(a_n-b_n)+b_n$ deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$ **1p**

Problema 4. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ definit prin

$a_1>1$ şi $a_{n+1}=a_n+\frac{n}{a_n}$, $n\geqslant 1$

Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$

Florian Dumitrel, Slatina

Soluţie. $a_{n+1}\geqslant 2\sqrt{a_n\cdot\frac{n}{a_n}}=2\sqrt{n}\to\infty\Rightarrow a_n\to\infty$ **1p**

Arătăm că şirul $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ este convergent. Demonstrăm prin inducţie că $a_n>n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Pentru $n=1$ avem $a_1>1$. Presupunem că $a_k>k$ pentru un număr natural $k\geqslant 1$. În această ipoteză avem $a_{k+1}-(k+1)=a_k+\frac{k}{a_k}-(k+1)=\frac{a_k^2-(k+1)a_k+k}{a_k}=\frac{(a_k-1)(a_k-k)}{a_k}>0\Rightarrow a_{k+1}>k+1$ **2p**

$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{n-a_n^2}{n(n+1)a_n}<0\Rightarrow(a_n)_{n\geqslant 1}$ este strict descrescător **1p**

Fiind mărginit inferior de 1, şirul $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$este convergent. Dacă $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$, atunci $L\geqslant 1$ **1p**

Vom determina pe L, folosind lema Stolz-Cesaro: $\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)-n}=\frac{n}{a_n}\to\frac{1}{L}\Rightarrow\frac{a_n}{n}\to\frac{1}{L}$ **1p**

$L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{L}\Rightarrow L=1$ **1p**

Clasa a 12-a

Problema 1. Determinaţi toate polinoamele de forma $f = X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \ldots + a_n$ (unde $n \in \mathbb{N}^*$) , cu $a_k \in \{-1, 1\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, care au toate rădăcinile reale.

Soluţie. Avem $x_1^2 \ldots x_n^2 = a_n^2 = 1$ şi $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = a_1^2 - 2a_2 \leq 3$ **2p**

Folosind inegalitatea mediilor rezultă $3 \geq x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geq n\sqrt[n]{x_1^2 \ldots x_n^2} = n$, deci $n \leq 3$ **2p**

Pentru $n = 1$ avem $f = X \pm 1$, pentru $n = 2$ avem $f = X^2 \pm X - 1$, iar pentru $n = 3$ avem $f = X^3 - X \pm (X^2 - 1)$ **3p**

Problema 2. a) Demonstraţi că orice inel cu 6 elemente este izomorf cu $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$.

b) Este adevărat că orice inel cu 4 elemente este izomorf cu $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$?

Soluţie. a) Ordinul lui 1 în grupul aditiv $G = (A, +)$ al inelului este un divizor al lui 6, deci poate fi 2, 3 sau 6 .... **2p**

Dacă 1 are ordinul 2, atunci G nu are elemente de ordin 3, iar dacă 1 are ordinul 2, atunci G nu are elemente de ordin 2 – fals, conform teoremei Cauchy **2p**

Aşadar 1 are ordinul 6 şi $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \simeq \mathbb{Z}_6$ **1p**

b) Este fals: un exemplu este corpul $(\mathbb{F}_4, +, \circ)$, unde $\mathbb{F}_4 = \{a + bX \mid a, b \in \mathbb{Z}_2\}$ cu adunarea polinoamelor şi înmulţirea modulo $(X^2 + X + \hat{1})$, care se poate descrie prin $(aX + b) \circ (cX + d) = (bc + ad + ac)X + bd + ac$ **2p**

Problema 3. Demonstraţi că există o funcţie unică $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f^3(x) + 2f(x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că f este integrabilă şi calculaţi $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Soluţie. Condiţia se scrie $g(f(x)) = x$, unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = t^3 + 2t$. Cum g este bijectivă, f este chiar inversa lui g. De asemenea f este continuă (fiind inversa unei funcţii continue), deci integrabilă.. **3p**

Cu schimbarea de variabilă $x = g(t)$, $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 t(3t^2 + 2)\,\mathrm{d}t = \frac{7}{4}$ **4p**

Problema 4. Fie $f : [0, 1] \to (0, \infty)$ o funcţie continuă. Demonstraţi că

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geq \mathrm{e}^{\int_0^1 \ln(f(x))\,\mathrm{d}x}.$$

Soluţie. Considerăm diviziunea $\Delta_n = (0, 1/n, \ldots, n/n)$ a intervalului $[0, 1]$ şi familia de puncte intermediare $\xi_n = (1/n, 2/n, \ldots, n/n)$. Atunci

$$\mathrm{e}^{\sigma(\ln(f),\Delta_n,\xi_n)} = \mathrm{e}^{1/n \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f(k/n)\right)} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} f(k/n)} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) = \sigma(f, \Delta_n, \xi_n). \text{.... } \mathbf{5p}$$

Prin trecere la limită cu $n \to \infty$ obţinem concluzia............................ **2p**