CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIŢIA a VII-a, TULCEA, 2 aprilie 2016

Clasa a VII - a

1. a) Determinați numerele naturale nenule *n* care au proprietatea că d^2+1 este număr prim pentru orice divizor *d* al lui *n*.

b) Determinați numerele naturale nenule *n* care au proprietatea că d^2+2 este număr prim pentru orice divizor *d* al lui *n*.

2. Demonstraţi că dacă $a=\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{4n \text{ cifre}}$ și $b=\underbrace{\overline{33\ldots3}}_{2n \text{ cifre}}$, atunci numărul $N=a+6b+4$ este pătrat perfect.

.

3. Pentru fiecare $k\in\mathbb{N}^*$ definim numerele $a_k=2k+(-1)^k\cdot\dfrac{1+2+3+\ldots+2k}{\sqrt{1+3+5+\ldots+(2k-1)}}$ şi

$S_k=a_1+a_2+\ldots+a_{2k}$

a) Arătați că $S_1=8$;

b) Determinaţi $k\in\mathbb{N}^*$ pentru care numărul S_k este divizor al lui 2016.

4. Se consideră triunghiul ascuțitunghic *ABC* și *D* piciorul înălțimii din *A*. Punctul *M* este situat pe segmentul (AD) astfel încât $\dfrac{AM}{DM}=\dfrac{CD}{BD}$. Arătaţi că, dacă *N* este piciorul perpendicularei din *D* pe *BM*, atunci $AN\perp NC$.

Notă: - Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
- Timp de lucru: 4 ore efectiv.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL"

EDIŢIA A VIII-A, TULCEA, 2 aprilie 2016

Clasa a VIII – a

1. Determinați numerele naturale nenule *n* care au *k* divizori naturali, $d_1, d_2, ..., d_k$, $k \geq 4$, cu $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$, ştiind că $d_i + d_{i+1} + d_{i+2} = d_{i+3}$ pentru oricare $i = \overline{1, k-3}$.

2. Arătați că, dacă $x, y > 0$ și $x + y = 1$, atunci au loc inegalităţile:

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{x^2 + y} + \sqrt{x + y^2} < 2.$$

3. Să se determine numerele naturale nenule *a*, *b* , *c* şi *d*, $a < b < c < d$, care verifică simultan egalităţile $a + b + c = d$ şi $a^3 + b^3 + c^3 = d^2$.

4. Se consideră o prismă dreaptă $A_1A_2...A_nA_1'A_2'...A_n'$, $n \geq 3$, având baza un poligon regulat. Se ştie că $m\left(A_1A_2', A_2A_3'\right) = m\left(A_1A_2', A_2'A_3\right)$.

a) Arătaţi că $n = 4$;

b) Dacă $m\left(A_2A_3', A_2'A_3\right) = 60^\circ$ şi $A_1A_2 = a$, exprimaţi volumul prismei.

Notă: - Toate subiectele sunt obligatorii.

- Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
- Timp de lucru: 3 ore efectiv.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ ,,LAURENŢIU PANAITOPOL"

TULCEA, 2 APRILIE 2016

Clasa a IX-a

Problema 1. Considerăm mulţimea

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{[x]}{\{x\}} = n \right\},$$

cu n număr natural.

a) Determinaţi A_3.

b) Arătaţi că A_n este infinită dacă şi numai dacă $n = 0$.

Problema 2. Fie $ABCD$ un patrulater convex, cu $\{O\} = AC \cap BD$, şi punctele $M \in (AD)$, $N \in (BC)$ astfel încât

$$\frac{MA}{MD} = \frac{NC}{NB}.$$

a) Arătaţi că dacă $O \in MN$, atunci $AD \parallel BC$ ($ABCD$ este trapez sau paralelogram).

b) Arătaţi că dacă O este mijlocul segmentului $[MN]$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Problema 3. Dacă a, b sunt numere reale pozitive cu $a + b = 1$, arătaţi că

$$7\left(a^4 + b^4\right) - 4\left(a^7 + b^7\right) \geqslant \frac{13}{16}.$$

Problema 4. Determinaţi termenul general al şirului de numere naturale nenule $(a_n)_{n \geqslant 1}$, ştiind că a_1 este impar şi că are loc relaţia

$$\frac{a_n^2}{2n + a_n} - \frac{n}{a_n} = \frac{a_{n+1} - 4}{3},$$

pentru orice număr natural $n \geqslant 1$.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ „LAURENŢIU PANAITOPOL”

TULCEA, 2 APRILIE 2016

Clasa a 10-a

Problema 1. Fie r o rădăcină complexă a ecuaţiei $z^2+z+1=0$ şi a, b, c trei numere complexe nenule care au acelaşi modul şi verifică relaţia $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3r$.

Demonstraţi că $a^{2016}=b^{2016}=c^{2016}$.

Problema 2. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x^{\log_{16} x}=4-8x$.

Problema 3. Fie p, m, n numere naturale nenule, cu $m \leq n$. Determinaţi numărul $p-$uplurilor de mulţimi $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ care verifică simultan relaţiile:

i) $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_p = \{1, 2, \ldots, n\}$;

ii) mulţimea $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_p$ are m elemente.

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater convex, $\mathcal{P}$ perimetrul său şi G centrul său de greutate (punctul al cărui afix g verifică relaţia $4g=a+b+c+d$, unde a, b, c, d sunt afixele vârfurilor A, B, C, respectiv D).

a) Arătaţi că $GA+GB+GC+GD<\mathcal{P}$.

b) Arătaţi că, dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $MA+MB+MC+MD<\mathcal{P}$, pentru orice punct M din interiorul lui $ABCD$.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ

,,LAURENŢIU PANAITOPOL"

TULCEA, 2 APRILIE 2016

Clasa a XI-a

Problema 1. a) Daţi exemplu de o matrice $A \in \mathcal{M}_4(\{0,1\})$, care verifică relaţia

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Arătaţi că dacă $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi există $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, astfel încât $X^2 = J$, atunci n este pătrat perfect.

Problema 2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $A^2 = O_2$. Arătaţi că pentru orice matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ au loc inegalităţile $\det(AB - BA) \leqslant 0 \leqslant \det(AB + BA)$.

Problema 3. Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un şir convergent de numere reale pozitive. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + a_k}.$$

Problema 4. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ definit prin

$$a_1 > 1 \text{ şi } a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n},\ n \geqslant 1.$$

Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ
,,LAURENŢIU PANAITOPOL"

TULCEA, 2 APRILIE 2016

Clasa a 12-a

Problema 1. Determinaţi toate polinoamele de forma

$$f = X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \ldots + a_n$$

(unde $n \in \mathbb{N}^*$) , cu $a_k \in \{-1, 1\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, care au toate rădăcinile reale.

Problema 2. a) Demonstraţi că orice inel cu 6 elemente este izomorf cu $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$.
b) Este adevărat că orice inel cu 4 elemente este izomorf cu $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$?

Problema 3. Demonstraţi că există o funcţie unică $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$f^3(x) + 2f(x) = x,$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că f este integrabilă şi calculaţi $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Problema 4. Fie $f : [0, 1] \to (0, \infty)$ o funcţie continuă. Demonstraţi că

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geq \mathrm{e}^{\int_0^1 \ln(f(x))\,\mathrm{d}x}.$$