CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL"

EDIŢIA a VIII-a, TULCEA, 1 aprilie 2017

Clasa a VII - a

1. Se consideră trapezul $ABCD$ în care $AB \parallel CD$ şi E este mijlocul laturii $[AD]$. Se construieşte trapezul $CEFG$ astfel încât $EF \parallel CG$, iar B este mijlocul segmentului $[FG]$. Arătaţi că trapezele $ABCD$ şi $CEFG$ au arii egale.

2. Se consideră un număr prim p, $p \geq 5$, şi numerele $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-3} + \frac{1}{p-2}$.

Arătați că numerele a și b dau același rest la împărțirea cu p.

.

3. a) Arătaţi că există o singură pereche de numere naturale nenule (m, n) care este soluţie a ecuaţiei $2xy + x + y - 60 = 0$.

b) Arătaţi că, oricum am considera la întâmplare 21 de numere naturale nenule mai mici decât 30, există printre acestea un număr a pentru care ecuaţia $4xy + 2x + 2y + 1 - a^2 = 0$ are soluţie unică în mulţimea numerelor naturale nenule.

4. Se consideră trapezul $ABCD$ în care $AB \parallel CD$, $m(\widehat{BAD}) = 90^\circ$, iar $BD \cap AC = \{O\}$. Paralela prin O la bazele trapezului intersectează segmentele (AD) şi (BC) în punctele E şi respectiv F. Arătaţi că:

a) $\widehat{BEO} \equiv \widehat{CEO}$;

b) $EF = \frac{2 \cdot AB \cdot DC}{AB + DC} < \frac{2 \cdot EB \cdot EC}{EB + EC}$.

Notă: - Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
- Timp de lucru: 3 ore efectiv.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIŢIA A VII-A, TULCEA, 1 aprilie 2017

Clasa a VIII – a

1. Se consideră o mulţime nevidă M de numere reale nenule cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y, z \in M$, avem $xy + yz + zx \in \mathbb{Q}$. Arătaţi că, oricare ar fi $a, b \in M$, avem $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

2. a) Arătați că $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$, oricare ar fi numerele reale a și b.

b) Determinați numerele reale $x, y \geq 0$ astfel încât $\begin{cases} [x]^2 + \{y\}^2 \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \\ [y]^2 + \{x\}^2 \leq \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \end{cases}$, unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă și respectiv partea fracționară a numărului real a.

3. Numerele reale nenule a, b, c şi d au module diferite şi verifică relaţia $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$.

a) Arătaţi că $\frac{a+b}{a(c+d)} + \frac{a+c}{a(b+d)} + \frac{a+d}{a(b+c)} + \frac{b^2+c^2+d^2}{bcd} = 0$;

b) Pentru $a = 2$ şi $b = -3$, arătaţi că există $c, d \in \mathbb{Z}$ astfel încât numerele a, b, c şi d să verifice condiţiile din ipoteză.

4. Punctele S, Q și R sunt mijloacele muchiilor $[A'D']$, $[AB]$ și respectiv $[CC']$ ale cubului $[ABCDA'B'C'D']$ cu $AB = a$. Calculaţi distanţa de la punctul B la planul (SQR).

Notă: - Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
- Timp de lucru: 3 ore efectiv.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ ,,LAURENŢIU PANAITOPOL”
TULCEA, 1 APRILIE 2017
SUBIECTELE
CLASA a 9-a

1. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $2|x-a|+3|x+a| = 12$ are exact două soluţii.

2. Fie n un număr natural nenul fixat. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $[x-2016]^n+[2017-x]^n = 2$, unde prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a.

3. Determinaţi cel mai mic număr natural n care are proprietatea: oricum am lua n vectori $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ în plan, există unul dintre ei – de exemplu $\overrightarrow{v_n}$ – şi numerele reale nenegative $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ astfel încât $\overrightarrow{v_n} = x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + x_{n-1}\overrightarrow{v_{n-1}}$.

4. a) Se consideră numerele reale $a, b, c \in (-2, \infty)$ cu proprietatea $a + b + c = -3$. Să se arate că $\dfrac{a}{a+2} + \dfrac{b}{b+2} + \dfrac{c}{c+2} \leqslant -3$. Când are loc egalitatea?

b) Se consideră numerele reale $a, b, c \in (-\infty, -2)$ cu proprietatea $a+b+c = -9$. Să se arate că $\dfrac{a}{a+2} + \dfrac{b}{b+2} + \dfrac{c}{c+2} \geqslant 9$. Când are loc egalitatea?

Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7
Timp de lucru 3 ore

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ ,,LAURENŢIU PANAITOPOL"
TULCEA, 1 APRILIE 2017
SUBIECTELE
CLASA a 10-a

1. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie cu proprietatea $|f(x)+f(y)+f(z)| \leqslant |f(x+y+z)|$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{C}$. Arătaţi că $f(x) + f(y) = f(x + y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{C}$.

2. Determinaţi funcţiile crescătoare $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care au proprietatea

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3,$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$.

3. Arătaţi că $\dfrac{\sqrt[3]{17+\sqrt{297}}+\sqrt[3]{17-\sqrt{297}}-1}{3}$ este soluţie a ecuaţiei

$$x^4 + 1 = 2\sqrt[4]{2x-1}.$$

4. Arătaţi că, dacă $\sin 2x$ şi $\sin 3x$ sunt numere raţionale, atunci $\sin nx$ este număr raţional, oricare ar fi numărul natural n.

Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7
Timp de lucru 3 ore

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ ,,LAURENŢIU PANAITOPOL"
TULCEA, 1 APRILIE 2017
SUBIECTELE
CLASA a 11-a

1. Fie n un număr natural nenul şi $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 = I_n$, $B^2 = 2I_n$ şi $AB = BA$. Arătaţi că, dacă a, b sunt numere întregi, nu ambele nule, atunci matricea $aA + bB$ este inversabilă.

2. Fie ABC un triunghi în plan, având vârfurile de coordonatele întregi, aria S şi care verifică relaţia $(AB+AC)^2 < 8S+1$. Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ şi d_n cel mai mare divizor comun al elementelor matricei $A^n - I_2$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \infty$.

4. Vom spune că un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este de tip *zero plus* dacă are termeni strict pozitivi şi limita 0.

a) Arătaţi că, dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este de tip zero plus şi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcţie bijectivă, atunci şirul $(x_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ are limita 0.

b) Arătaţi că, dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este de tip zero plus, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcţie bijectivă, iar şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $y_n = \dfrac{x_{f(n)}}{x_n}$ are limită, atunci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita 1.

c) Daţi un exemplu de şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tip zero plus şi de funcţie bijectivă $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, astfel încât şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $y_n = \dfrac{x_{f(n)}}{x_n}$ să nu aibă limită.

Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7
Timp de lucru 3 ore

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ ,,LAURENŢIU PANAITOPOL”
TULCEA, 1 APRILIE 2017
SUBIECTELE
CLASA a 12-a

1. Calculaţi

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\,\mathrm{d}x.$$

2. Fie M o mulţime dotată cu o lege de compoziţie asociativă „$\cdot$”, având proprietăţile:
i) dacă $x, y, z \in M$ şi $xy = xz$ sau $yx = zx$, atunci $y = z$;
ii) pentru orice $x \in M$, mulţimea $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.
Arătaţi că $(M, \cdot)$ este grup.

3. Determinaţi valoarea maximă a integralei $\displaystyle\int_0^y \sqrt{x^4 + (y-y^2)^2}dx$ pentru $0 \leqslant y \leqslant 1$.

4. Fie $(L, +, \cdot)$ un corp comutativ în care $1 + 1 \neq 0$. Arătaţi că soluţiile ecuaţiei $x^2 + y^2 = 1$, $x, y \in L$ sunt $(1, 0)$ şi perechile de forma $((r^2-1)(r^2+1)^{-1}, 2r(r^2+1)^{-1})$, unde $r \in L$, $r^2 \neq -1$.

Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7
Timp de lucru 3 ore