Notă

O demonstrație a inegalității Nesbitt

de ***Petre Guțescu***

În această notă vom da o nouă demonstrație inegalității Nesbitt. O reamintim: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$, pentru orice numere strict pozitive $a,b,c.$

Funcția $f:(1,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=\lg x$ este surjectivă. Prin urmare există $x,y,z\in(1,\infty)$ astfel încât $\lg x=a,\lg y=b,\lg z=c.$ Inegalitatea Nesbitt devine echivalentă cu inegalitatea:

$$\frac{\lg x}{\lg y+\lg z}+\frac{\lg y}{\lg z+\lg x}+\frac{\lg z}{\lg x+\lg y}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\log_{yz}x+\log_{zx}y+\log_{xy}z\geq\frac{3}{2}.\qquad(1)$$

Avem: $\log_{xy}yz+\frac{1}{\log_{xy}yz}\geq 2,\ \log_{yz}zx+\frac{1}{\log_{yz}zx}\geq 2,\ \log_{zx}xy+\frac{1}{\log_{zx}xy}\geq 2$ care sunt echivalente cu inegalitățile

$\log_{xy}yz+\log_{yz}xy\geq 2,\ \log_{yz}zx+\log_{zx}yz\geq 2,\ \log_{zx}xy+\log_{xy}zx\geq 2$ din care, prin adunarea membru cu membru, se obține inegalitatea: $\log_{xy}\left(xyz^2\right)+\log_{yz}\left(x^2yz\right)+\log_{zx}\left(xzy^2\right)\geq 6$ din care se obține $(1).$

Demonstrația este încheiată.