CLASA a V a

5.3) Să se afle suma cifrelor numărului $9+99+999+\underbrace{99...9}_{50\ de\ cifre}$

5.4) La magazia unei societăţi comerciale a fost adus un vas cu 240 litri dintr−o substanţă care trebuia repartizată la trei secţii de producţie în mod egal. În acel moment Andrei nu avea la îndemână decât trei butoaie goale: unul de 50 de litri, unul de 110 litri şi altul de 130 litri. Cum a procedat Andrei?

5.5) Se consideră un număr natural n cu toate cifrele diferite între ele şi care are prima cifră 1. Se ia această primă cifră şi se mută la sfârşitul numărului considerat. Astfel, se obţine un număr natural de trei ori mai mare decât primul. Care este numărul n?

5.6) Să se calculeze $(3^{100}+3^{103}) :(3^{99}-3^{98}+3^{97})$

5.7) Să se afle ultima cifra nenula a numărului $2^{507}\cdot 25^{20}\cdot 7^{63}$

5.8) Fie numerele a = $5\cdot 3^{2012}$ şi b =$14\cdot 3^{2010}$. Să se calculeze restul împărţirii numărului a la numărul b

5.9) Să se arate că suma $1+3+3^2+3^3+...+3^{2002}+3^{2003}$ se divide cu 4 și cu 13

5.10) Numerele naturale nenule se scriu,pe linii,într−un tablou triunghiular în felul următor.

1
2 3 4
5 6 7 8 9
.....

Astfel 1 se găsește pe prima linie a tabloului, 2, 3 si 4 pe linia a doua,5,6,7,8,9 pe linia a treia și așa mai departe. Aflați pe ce linie a tabloului se găseste numărul 2007 și ce poziție ocupă pe linia respectivă.

5.11) Se dă mulțimea M={1;4;7;10;13;...;97;100} și o submulțime S a lui M formată din 19 elemente. Să se arate că există în mulțimea S două elemente a căror suma este egală cu 104

5.12) Fie A o multime de numere naturale cu proprietațile a) 80∈A b) dacă 7x+3∈A atunci x∈A c) dacă x∈A atunci {7x+4;7x+5}⊂A. Arătați că 4001 și 4002 sunt elemente ale lui A

Probleme selectate de prof. **Adrian Muscalu**

CLASA a VI a

6.4) Spunem că o mulțime X de numere naturale are proprietatea (P) dacă suma oricăror trei elemente din X este număr prim

a) Dați un exemplu de mulțime cu proprietatea (P), de forma X={5,7,a,b}
b) Arătați că nu există mulțimi X cu proprietatea (P) astfel încât card(X)≥5

6.5) Fie numărul A =1234…200820092010.

a) Să se calculeze suma cifrelor numărului A.
b) Să se stabilească dacă numărul A este pătrat perfect
c) Să se stabilească câte numere pătrate perfecte se pot obţine schimbând ordinea cifrelor numărului A.

6.6) Stabiliţi câte numere naturale cuprinse între 1000 si 2009, împărţite la 9 dau restul 8 și împărţite la 8 dau restul 7.

6.7) Determinaţi cel mai mic număr natural n, de patru cifre, ştiind că n − 19 este divizibil cu 28 şi n − 31 este divizibil cu 36.

6.8) Notăm cu S(n), suma tuturor divizorilor naturali ai numărului natural n. Un număr natural n se numeste număr perfect dacă S(n)= 2n .

a) Arătați că 6 și 28 sunt numere perfecte.
b) Dacă numerele k si 2^k-1 sunt simultan numere prime, demonstrați că numărul n= $2^{k-1}\cdot(2^k-1)$ este număr perfect.

6.9) a) Să se demonstreze că $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

b) Să se calculeze suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{600}$

c) Să se arate că $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{20^2}<\frac{39}{20}$

6.10) Demonstrați că niciun număr natural nenul nu poate fi scris ca sumă de doua fracții ireductibile cu numitori diferiți

6.11) Segmentele [AB] și [CD] au AB=7 cm și CD=10 cm și sunt desenate în plan. Folosind rigla negradată și compasul să se găsească E∈(AB) astfel încât BE=1 cm

6.12) Fie segmentul A_1A_2 de lungime 1. Segmentul A_2A_3 are lungimea 3/10 din A_1A_2, segmentul A_3A_4 are lungimea 3/10 din A_2A_3 și așa mai departe. Să se arate că: $A_1A_2+ A_2A_3 + A_3A_4 + \ldots + A_nA_{n+1}<10/7$.

6.13) Pe dreapta d se consideră punctele distincte M,A,B,C,N în această ordine, astfel încât MN = 2012dm. Ştiind că lungimile, în metri, ale segmentelor [AB], [BC], [AC] sunt exprimate prin numerele naturale, $2^x \cdot \overline{aa}$ aa; $2^y \cdot \overline{bb}$; respectiv $\overline{ab6}$, cu x,y∈N, iar a,b sunt cifre nenule, aflaţi lungimea segmentului [AB].

Probleme selectate de prof. **Adrian Muscalu**

CLASA a VII a

7.4) Dacă numerele întregi a,b,c verifică relația 27a+23b−21c=0 arătați că $\frac{(3a+b)(9a-7c)}{483} \in Z$

7.5) Fie mulţimea $A=\left\{\frac{2009}{8},\frac{2010}{9},\frac{2011}{10},....\right\}$. Determinaţi cardinalul mulţimii B = {x |x∈A∩N}.

7.6) Fie numerele $a=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2009}$ si $b=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2010}$. Arataţi că $a-b=\frac{1}{1006}+\frac{1}{1007}+...+\frac{1}{2010}$

7.7) Fie $0,a_1a_2a_3....$, scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{6}+\frac{7}{13}$. Determinaţi a_{2005}

7.8) Să se afle numărul natural abc astfel încât $\sqrt{1+3+5+...+\overline{abc}}=\overline{cba}$

7.9) Să se determine numerele reale x, y, z astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile: $[x]\cdot\{y\}=1004\sqrt{2},\{y\}\cdot|z|=1$ și $|z|\cdot[x]=2008\sqrt{2}$, unde [a] reprezintă cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu numărul real a , iar {a}=a−[a].

7.10) Se dă patrulaterul convex ABCD şi punctele M∈[AB] , N∈ [BC] , P∈ [CD] , Q∈ [AD] astfel încât 2AM = AB , 3BN = BC , 2PC = DC , 3AQ = AD. Dacă T este mijlocul lui NQ , să se arate că punctele M , T , P sunt coliniare .

7.11) Se consideră pătratul *ABCD* în care *M* este mijlocul laturii [*AB*], iar *N* un punct pe latura [*AD*] astfel ca *ND* = 3*NA*. Să se arate că [NM este bisectoarea unghiului *ANC.*

7.12) Fie ABCD un trapez dreptunghic, AB||CD, AD⊥AB, în care AD=AB+CD și M∈(AD) astfel încât AM=AB.
a) Arătați că triunghiul BMC este dreptunghic;
b) Dacă N este mijlocul lui (BC) , MC∩DN={P} și AN∩MB={Q} atunci MPNQ este dreptunghi.

7.13) Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC (AB = AC) și punctele M, P∈[AB] astfel ca AM = BP. Fie D mijlocul laturii BC iar R,Q intersecțiile perpendicularei din A pe CM cu CM și respectiv BC. Arătați că:
a) ∡AQC≡∡PQB; b) m(∡ DRQ) = 45°:

Probleme selectate de prof. **Adrian Muscalu**

CLASA a VIII a

8.3) Calculaţi suma $\frac{1}{2\lfloor\sqrt{1}\rfloor+1}+\frac{1}{2\lfloor\sqrt{2}\rfloor+1}+\ldots+\frac{1}{2\lfloor\sqrt{99}\rfloor+1}$ unde [x] reprezintă partea întreagă a numărului real x

8.4) Se ştie că exact unul dintre numerele reale x, y şi z este iraţional, iar numărul N = xy + xz + yz este raţional. Demonstraţi că N ≤0.

8.5) Sa se afle suma valorilor lui x ∈Z pentru care numărul

$$E=\frac{\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{18+8\sqrt{2}}}{x-2}\in Z$$

8.6) Determinaţi n∈N* − {1} astfel încât numărul $a=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$ să fie element al mulţimii $A=\left\{x\in R\,|\,|x|<\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right\}$

8.7) Fie mulţimile B={4n+2|n∈N}, C={a^2-b^2|a,b∈Z}. Determinaţi mulţimea B∩C .

8.8) Aflaţi numărul natural n pentru care $\left(\sqrt{n+1}+1\right)\left(\sqrt{\sqrt{n+1}}+1\right)\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{n+1}}+1}\right)=n$

8.9) Se consideră în spaţiu punctele A,B,C,D astfel încât AC = BD = 10 și AB = BC =6, CD = DA =8. Arătați că punctele sunt coplanare.

8.10) Se consideră un cub ABCDA' B' C' D' . În fiecare din vârfurile A, B, D şi A' se înscrie numărul 1, iar în ficare din vârfurile C,C' , B' şi D' se înscrie numărul 0. Numim *operaţie* faptul că mărim sau micşorăm cu acelaşi număr numerele de pe aceeaşi muchie. Este posibil ca după un număr finit de *operaţii* să obţinem în fiecare vârf numărul 2009?

8.11) Fie triunghiul ABC cu AB = 14 cm , AC = 13 cm , BC = 15 cm şi N∈(BC) astfel încât NC=2BN .Dacă MN⊥ (ABC) şi MN = 4 cm , calculaţi:
a) distanţa de la M la AC.
b) distanţa de la N la planul (MAB).

8.12) Să se arate că, dacă cercurile circumscrise feţelor unui tetraedru au raze egale, atunci muchiile opuse ale tetraedrului sunt congruente două câte două.

Probleme selectate de prof. **Adrian Muscalu**