**9.6)** Fie mulțimea $A_p=\{x\in \boldsymbol{R}\,|\,|x-p|+|x+1|=4\}$, unde $p\in \boldsymbol{R}$ este un parametru.

a) Determinațivalorilelui *p* pentru care mulțimea $A_p$ este infinită și aflați mulțimea $A_p$.

b) Determinați valorile lui *p* pentru care mulțimea $A_p$ are un element.

**9.7)** Știind că $x,y,z$ sunt numere reale care satisfac egalitatea $x(2y-3z)+2y(y-z)+2z(2z-x)=0$, să se arate că $x+y=4z$.

***PetreGuțescu***

**9.8)** Fie $x,y,z\in(0,\infty)$ astfel încât $xy+yz+zx=3$. Să se demonstreze inegalitatea:

$\sqrt{1+x^4}+\sqrt{1+y^4}+\sqrt{1+z^4}\geq 3\sqrt{2}$. Când se realizează cazul de egalitate?

**9.9)** Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{3x-1}{4}\right]+\left[\frac{3}{4}(3x-1)\right]+\left[\frac{9x+1}{12}\right]+\left[\frac{9x+5}{12}\right]=\frac{3x-1}{4}$.

**9.10)** Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere reale pozitive de rație $r>0$. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este un șir de numere pozitive astfel încât $4b_n(1-a_n)\geq 4r^2+1, \forall n\in \boldsymbol{N}^*$, atunci:

$a_1a_2...a_n\leq \frac{a_1b_1}{b_n}, \forall n\in \boldsymbol{N}, n\geq 2.$

**9.11)** Să se determine progresiile aritmetice $x_1, x_2,..., x_n,...$ cu termenii strict pozitivi şi de raţie nenulă pentru care există $p\in N, p\geq 2,$ astfel încât:

$$\frac{x_1^{p-1}+x_2^{p-1}+...+x_p^{p-1}}{x_1x_2...x_p}\leq \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_p}.$$

***Petre Guțescu***

**9.12)** În triunghiul ABC considerăm I centrul cercului înscris în triunghi și punctele $M\in(AB), N\in(AC)$. Notăm $k_1=\frac{AM}{AB}, k_2=\frac{AN}{AC}$. Demonstrați că punctele M, I și N sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{b}{k_1}+\frac{c}{k_2}=a+b+c$

($a,b$ și $c$ sunt lungimile laturilor $[BC],[AC]$ și respectiv $[AB]$).

**9.13)** Arătați că dacă într-un triunghi ABC are loc relația $a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}=(a+b+c)\cdot\overrightarrow{OG}$, atunci triunghiul ABC este echilateral, unde $a=BC, b=AC, c=AB, O$ este centrul cercului circumscris și $G$ este centrul de greutate.

***Probleme propuse și selectate de prof.*** **Petre Guțescu**

## CLASA a X – a

**10.4)** Să se determine prima zecimală a numărului $A=\sqrt{n^2+n},\ n\in \boldsymbol{N}^*$.

**10.5)** Să se calculeze partea întreagă a numerelor reale:

$A=\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}$ și $B=\sqrt[4]{n(n+1)(n+2)(n+3)},\ n\in \boldsymbol{N}$.

**10.6)** Se consideră $a>b>1,\ A=\log_a(a-b)$ și $B=\log_b(a-b)$. Dacă $a^2+b^2=3ab$, atunci $A+B=2AB$.

Reciproca este adevărată?

**10.7)** Știind că $a,b,c$ sunt numere reale strict pozitive și că $\ln a\cdot\ln\frac{a^2}{b}+\ln b\cdot\ln\frac{b}{c^2}+\ln c\cdot\ln\frac{c^5}{a^4}=0$, să se determine $a,b,c$.

***Petre Guțescu***

**10.8)** Se consideră $z\in \boldsymbol{C}^*$ astfel încât $\left|z^8+\frac{1}{z^8}\right|\le 7$. Să se arate că $\left|z+\frac{1}{z}\right|\le\sqrt{5}$.

***Petre Guțescu***

**10.9)** Fie $z_1,z_2,z_3$ trei numere complexe de același modul *r*, distincte două câte două. Să se arate că:

a) $|z_1-z_2|\cdot|z_2-z_3|+|z_3-z_1|\cdot|z_1-z_2|+|z_2-z_3|\cdot|z_3-z_1|\le 9r^2$.

b) $\frac{1}{|z_1-z_2|\cdot|z_1-z_3|}+\frac{1}{|z_2-z_3|\cdot|z_2-z_1|}+\frac{1}{|z_3-z_1|\cdot|z_3-z_2|}\ge\frac{1}{r^2}$.

**10.10)** Fie $z_1,z_2,z_3,z_4$ numere complexe de același modul cu $0<\arg(z_1)<\arg(z_2)<\arg(z_3)<\arg(z_4)<\pi$.

Să se arate că $|z_1+z_4|<|z_2+z_3|$.

**10.11)** Fie $ABCDE$ un pentagon convexși $M,N,P,Q,R$ mijloacele laturilor $AB,BC,CD,DE,EA$. Dacă segmentele $AP,BQ,CR$ și $DM$ sunt concurente, să se arate că punctul lor de concurență aparține segmentului $EN$.

***Probleme propuse și selectate de prof.*** **Petre Guțescu**

**11.4)** Se dă permutarea $\sigma \in S_4$ pentru care $\sigma^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Să se determine permutarea $\sigma$.

**11.5)** Fie $A(k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\boldsymbol{R})$.

a) Să se arate că $A(1) \cdot A(2) \cdot \ldots \cdot A(n) = A\left(\frac{n(n+1)}{2}\right), \forall n \geq 1$.

b) Să se calculeze $A^n(2016)$.

**11.6)** Pentru orice matrice $X \in M_n(R)$ notăm cu $s(X)$ suma tuturor elementelor sale.Să se arate că pentru orice matrice $A, B \in M_n(R)$ este adevărată inegalitatea:
$s(A \cdot {}^tB) \cdot s\left(B \cdot {}^tA\right) \leq s(A \cdot {}^tA) \cdot s\left(B \cdot {}^tB\right)$.

**11.7)** Fie $A, B \in M_n(\boldsymbol{Z})$, astfel încât $AB = I_n$ și $\det(A + B + I_n) < 0$. Arătați că $\det(A) \leq -1$.

**11.8)** Să se compare numerele: $\left(\frac{2014}{2013}\right)^{2013}$ şi $\left(\frac{2012}{2011}\right)^{2012}$.

***Petre Guțescu***

**11.9)** Fie $a > 0$ şi $(a_n)_{n \geq 1}$ un şir care verificăinegalităţile $a + a_{n-1}{}^2 \leq a_{n+1}{}^3 \leq a + a_n{}^2$ , $\forall n \geq 2$ .Să se aratecă şirul este convergent.

**11.10)** Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ în care $x_1 \geq 1$ și $x_{n+1} = \sqrt[k+1]{(k+1)x_n - k}$ pentru orice $n \geq 1$, unde $k \in \boldsymbol{N}^*, k$ fixat. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și să se calculeze limita sa.

***Petre Guțescu***

**11.11)** Fie $(x_n)_{n \in \square^*}$ un şir cu proprietăţile:

a) $(x_n)_{n \in \square^*}$ este strict crescător şi $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{n^2} = 0$;

b) Există $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{n} = L$.

Să se arate că $L = 0$.

***Probleme propuse și selectate de prof.*** **Petre Guțescu**

**12.3)** Pe mulțimea $\boldsymbol{C}$ numerelor complexe se definește legea:
$z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + i \cdot \mathrm{Re}(z_1) \cdot \mathrm{Re}(z_2), \forall z_1, z_2 \in \boldsymbol{C}$.

a) Arătați că $(\boldsymbol{C}, \circ)$ este grup comutativ.

b) Calculați $\underbrace{(1+i) \circ (1+i) \circ \ldots \circ (1+i)}_{n-ori}$, $n \in \boldsymbol{N}^*$.

**12.4)** Fie $(G, \circ)$ un grup și $f : G \to G$ o funcție injectivă astfel încât pentru orice $x, y \in G$ are loc relația

$f\left(x^2 \circ f(y)\right) = x^{-1} \circ f(x \circ y)$. Demostrați că $(G, \circ)$ este grup abelian.

**12.5)** Fie $M$ o mulțime nevidă, "$*$" o lege de compoziție pe $M$ care admite element neutru și care are proprietatea: $a * b = x * y \Rightarrow a * x = b * y, \forall a, b, x, y \in M$. Să se arate că $(M, *)$ este grup abelian.

**12.6)** Fie $x, y$ elemente ale unui grup astfel încât $x^3 = y^4 = e$ și $yx = xy^3$. Să se arate că:

a) $y^2 x = xy^2$; b) $y^3 x = xy$; c) $y^{-1} x^{-1} y^{-1} = x^2$.

**12.7)** Fie $f : R \to R$, $g : R \to R$ * astfel încât $f$ nu are proprietatea lui Darboux, iar $g$ admite primitive. Să se demonstreze că $f \cdot g$ nu admite primitive pe $R$.

**12.8)** Să se determine funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ care admite o primitivă $F$ astfel încât $f(x) - F(x) = -\frac{x^n}{n!}, \forall x \in \boldsymbol{R}$ și $f(0) = 2$, unde $n \in \boldsymbol{N}^*$ este fixat. Calculați $\int \frac{x^{n-1}}{f(x)} dx$, $x > 0$.

**12.9)** a) Fie $f : I \to (0, \infty)$ o funcție de două ori derivabilă. Să se arate că

$$\int \left[ -\left( \frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 + \frac{f''(x)}{f(x)} \right] dx = \frac{f'(x)}{f(x)} + C.$$

b) Să se calculeze $\int \frac{1 + e^x (\cos x - \sin x)}{(e^x + \sin x + \cos x)^2} dx$, $x \in (0, \infty)$.

**12.10)** Să se determine primitivele funcției

$$f : (0,1) \to \boldsymbol{R}, f(x) = \frac{(1+x^2)\mathrm{arctg}x + x \ln x}{x(1+x^2)} \cdot \arcsin x + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \mathrm{arctg}x.$$

***Petre Gutescu***

***Probleme propuse și selectate de prof.*** **Petre Gutescu**