CLASA a V a

5.1) Patru fete au participat la un concurs de matematică. După concurs, fiecare fată este rugată să spună pe ce loc s-a clasat. Fran, spune ea nu s-a clasa nici prima, nici a patra. Gabby spune că nu luat primul loc . Heidi spune că ea s-a clasat prima. Iris spune că a iesit a patra. Un martor de încredere, spune că trei dintre aceste răspunsuri sunt adevărate și unul este fals. În ce poziție s-a clasat Gabby?

Concurs SUA

❖Soluție

Presupunem că Heidi minte. Atunci ea nu a ocupat primul loc și celelalte 3 fețe spun adevărul. În acest caz Fran nu a luat primul loc și nici Gabby sau Iris. Prin urmare nimeni nu a ieșit pe primul loc, ceea ce e fals. Rezultă că Heidi spune adevărul și ea a ieșit pe primul loc. Se deduce imediat că și Gabby spune adevărul.

Presupunem că Fran minte, atunci ea s-a clasat prima sau a patra, dar cum Heidi este prima deducem că Fran a ieșit a patra. Atunci și Iris minte ceea ce e imposibil. Rezultă că Fran spune adevărul și atunci ea s-a clasat pe unul din locurile 2 sau 3.

Rămâne atunci că singura posibilitate este că Iris minte. Atunci ea nu s-a clasat a patra și cum nici Fran nu s-a clasat a patra deducem că pe locul patru a ieșit Gabby

5.2) Într −o urnă sunt 7 bile negre, 6 bile albe și 8 bile albastre. Extragem din urnă o bilă, fără a ne uita la bila pe care o extragem. Precizați care este cel mai mic număr de bile care trebuie extras pentru a fi siguri că am scos:

a) cel puțin o bilă neagră
b) cel puțin o bilă de fiecare culoare
c) cel puțin 3 bile de aceeasi culoare

Prof. Muscalu Adrian

❖Soluție

a) Dacă am lua 14 bile ar putea fi 6 albe și 8 albastre, deci niciuna neagră. Deducem că pentru a fi siguri că am luat o bilă neagră este să alegem 15 bile

b) Dacă am alege 15 bile ar putea fi 7 negre și 8 albastre. Pentru a fi siguri că am luat o bilă de fiecare culoare trebuie alese 16 bile

c) Dacă am lua 6 bile ar putea fi câte două de aceeași culoare. Atunci, pentru a fi siguri că alegem 3 bile de aceeași culoare, trebuie alese 7 bile

CLASA a VI a

6.1) Numerele naturale 1, 2, 3,…, 1000 sunt scrise pe cartonaşe, cu faţa scrisă în jos. Spunem că un cartonaş este ”cu noroc”, dacă numărul scris pe el este divizibil cu 3 sau cu 5. Care este cel mai mic număr de cartonaşe pe care trebuie să le întoarcem, fără a privi, pentru a fi siguri că cel puţin unul dintre ele este ”cu noroc”?

Prof. Muscalu Adrian

❖Soluție

Notăm $A=\{n\in N^* \mid n<1000 \text{ si } 3|n\}$, $B=\{n\in N^* \mid n<1000 \text{ si } 5|n\}$, $C=\{n\in N^* \mid n<1000$ şi $15|n\}$.

$A=\{3,6,\ldots,999\}=\{3\cdot 1, 3\cdot 2,\ldots,3\cdot 333\}\Rightarrow card(A)=333$

$B=\{5,10,\ldots,1000\}=\{5\cdot 1, 5\cdot 2,\ldots,5\cdot 200\}\Rightarrow card(B)=200$

$C=\{15,30,\ldots,990\}=\{15\cdot 1, 15\cdot 2,\ldots,15\cdot 66\}\Rightarrow card(C)=66$

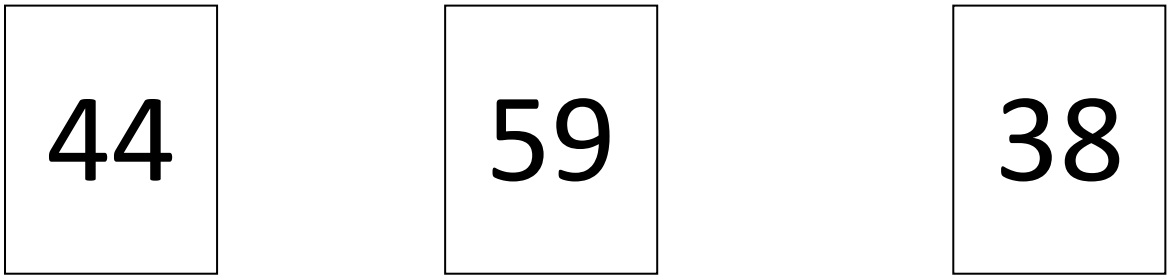
Numărul de numere naturale nenule care sunt divizibile cu 3 sau cu 5 este

$card(A)+card(B)-card(C)=467$

Atunci în mulțimea $\{1,2,\ldots,1000\}$ sunt $1000-467=533$ de numere care nu sunt divizibile cu 3 sau cu 5.

Pentru a fi siguri că am ales un număr divizibil cu 3 sau cu 5 trebuie să alegem 534 de cartonașe

6.2) Barry a scris 6 numere diferite câte unul pe fiecare parte a 3 cartonaşe și a pus cartonasele pe masă, după cum se arată .



Sumele celor două numere pe fiecare dintre cele trei cartonaşe sunt egale . Cele trei numere de pe feţele ascunse sunt numere prime . Care sunt numere prime ascunse ?

Concurs SUA

❖Soluție

Fie x,y și z numerele de pe spatele cartonașelor. Atunci 44+x, 59+y, 38+z sunt numere prime și cum sunt mai mari ca doi ele sunt impare. Dacă 59+y este impar rezultă că y=2 și suma este 59+2=61. Obținem că 44+x=61 și 38+z=61 și atunci x=17 și z=23

6.3) Într-un război sultanul Mohamed capturează trei inamici şi îi condamnă la moarte. Întrucât îi plăceau jocurile înainte de a-i omorî la propune o modalitate să scape cu viaţă.
Îi aşează în şir indian cu faţa la perete (astfel încât primul privea peretele, al doilea îl vedea pe cel dintâi iar ultimul îi vedea pe ceilalţi doi) şi aduce un sac în care se aflau 3 fesuri albe şi 2 fesuri roşii.
Le pune fiecăruia câte un fes pe cap (la întâmplare) după care îi întreabă ce culoare are fesul pe care îl poartă.
Ultimul spune că nu ştie şi este condamnat la moarte.
Al doilea nici el nu ştie şi este pedepsit şi el.
Primul spune că ştie ce culoare are fesul său şi scapă cu viaţă.
Întrebarea este: cum şi-a dat seama primul ce fes avea pe cap.

***

❖Soluție

Ultimul vede fesurile celorlalți doi. Singura situație în care putea să-și dea seama ce culoare este fesul sau era să vadă 2 fesuri roșii, în acest caz el avea alb. Cum nu poate să-și dea seama ce fes are pe cap înseamnă ca a văzut cel puțin un fes alb.

Al doilea își da seama cum a gândit ultimul și dacă vede un fes roșu înseamnă că el are alb. Cum nu poate deduce ce fes are înseamnă că a văzut un fes alb

Primul își da seama cum au gândit ceilalți doi și deduce că are un fes alb

CLASA a VII a

7.1) Se consideră un număr natural prim p.
a) Arătați că, dacă p > 3, atunci numărul $m=2p^2+1$ este compus.
b) Determinați toate numerele naturale prime p cu proprietatea că numărul $m=2p^2+1$ este pătrat perfect.

Concursul Naţional de Matematică "Laurenţiu Panaitopol:- Tulcea 2013

❖Soluție

a) Cum p este prim cu 3, rezultă că $p^2=3k+1, k\in N^*$.

Deci $m=2p^2+1=6k+3=2(3k+1)$. Aşadar, m este produs de doi factori mai mari decât 1, adică este număr compus.

b) Dacă $m=q^2, q\in N^*$, obținem $2p^2+1=q^2$, adică $2p^2=(q-1)(q+1)$. Deoarece membrul stâng al ultimei relații este număr par, iar numerele q-1,q+ 1 au aceeaşi paritate, rezultă că ambele sunt pare.Deci membrul drept al egalității este multiplu de 4. Deducem că p = 2 . Într-adevăr, $2\cdot 2^2+1=3^2$

7.2) Să se rezolve în numere reale ecuația $\frac{x-7}{93}+\frac{x-8}{92}=\frac{7}{x-93}+\frac{8}{x-92}$

❖Soluție

$$\frac{x-7}{93}+\frac{x-8}{92}=\frac{7}{x-93}+\frac{8}{x-92}\Leftrightarrow\frac{x-7}{93}-1+\frac{x-8}{92}-1=\frac{7}{x-93}-1+\frac{8}{x-92}-1\Leftrightarrow$$

$$\frac{x-100}{93}+\frac{x-100}{92}=\frac{100-x}{x-93}+\frac{100-x}{x-92}\Leftrightarrow(x-100)\left(\frac{1}{93}+\frac{1}{92}\right)+(x-100)\left(\frac{1}{x-93}+\frac{1}{x-92}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-100)\left(\frac{1}{93}+\frac{1}{92}+\frac{1}{x-93}+\frac{1}{x-92}\right)=0\Leftrightarrow(x-100)\left(\frac{x}{93(x-93)}+\frac{x}{92(x-92)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-100)\left(\frac{1}{93(x-93)}+\frac{1}{92(x-92)}\right)=0\Leftrightarrow x(x-100)\left(\frac{92x-92^2+93x-93^2}{92\cdot 93(x-92)(x-93)}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left\{0,100,\frac{17113}{185}\right\}$$

CLASA a VIII a

8.1) Se consideră piramida SABCD în care baza ABCD este un paralelogram cu centrul în punctul O, AB = $2\sqrt{3}$ cm şi A_{ABCD} =12cm^2 . Se ştie că SO⊥(ABCD) , SO = $\sqrt{3}$ cm, iar (SBC) ⊥(SDA).
a) Demonstrați că piramida SABCD este regulată;
b) Arătați că $A_{SAC}=A_{SAB}$.

Concursul Naţional de Matematică "Laurenţiu Panaitopol:- Tulcea 2013

❖Soluție

a) Considerăm punctele E DC ∈ şi F AB ∈ astfel încât SE⊥ DC şi SF⊥ AB. Rezultă că punctele E, O şi F sunt coliniare, iar EF⊥DC .
Deoarece A_{ABCD} = AB·EF , rezultă că EF = $2\sqrt{3}$ cm.
Considerăm punctele M∈BC şi N∈AD astfel încât SM⊥BC şi SN⊥AD. Rezultă că punctele M, O şi N sunt coliniare, iar MN⊥BC. Cum dreapta de intersecție a planelor (SBC) şi (SDA) este paralelă cu BC, deducem că m(SBC,SAD)=m(MSN)=90°
În triunghiul dreptunghic MSN , [SO] este mediană, deci MN=2· SO = $2\sqrt{3}$ cm.
Cum AB= EF= MN , rezultă că, în paralelogramul ABCD, distanțele dintre laturile opuse sunt egale cu laturile, rezultă că ABCD este pătrat.
Prin urmare, piramida SABCD este regulată.

b) Punctul F este mijlocul segmentului [AB]. Cum AF=SO = $\sqrt{3}$ cm, triunghiurile dreptunghice SAF şi ASO sunt congruente (I. C.)
Deoarece A_{SAC} =2·A_{ASO} , iar ASAB=2·A_{ASF} rezultă că A_{SAC}= A_{SAB}.

8.2) Se consideră punctele A(1;-1), B(-1;-5), C(0,5;-0,5) si D(0,(3);-1). Să se arate că trei din ele sunt coliniare.

Prof. Muscalu Adrian

❖Soluție

Se reprezintă punctele în plan și se observă că B, C și D sunt coliniare. Vom demonstra acest lucru. Fie funcția de gradul I, d:R→R, f(x)=ax+b al cărei grafic trece prin punctele B, C și D. Atunci f(-1)=-5 și f(0,5)=-0,5. Rezultă că –a+b=-5 și 0,5a+b=-0,5. De aici se obține a=3 și b=-2. Atunci f(x)=3x-2 și f(0,(3))=-1. Prin urmare B, C și D sunt coliniare