CLASA a IX a

9.1) Fie a, b, c ∈ [0, +∞). Arătaţi că |a−b|+|b−c|+|c−a| = 2max{a,b,c}, dacă şi numai dacă abc=0.

Concursul Naţional de Matematică "Laurenţiu Panaitopol:- Tulcea 2013

❖Soluție

Dacă, de exemplu, a = 0, atunci max{a, b, c} = max{b, c} şi |a − b| + |b − c| + |c − a| = b + c + |b − c| =2 max{b, c}.
Reciproc, dacă presupunem, de exemplu, a ≤ b ≤ c (putem, datorită simetriei), atunci |a − b| + |b − c| + |c − a| = 2c − 2a şi max{a, b, c} = c, deci a = 0.

9.2) Fie dat triunghiul ABC și punctele $A\in(BC), N\in(AC), P\in(AB)$ astfel încât $AM\cap BN\cap CP=\{Q\}$. Știind că $\frac{MB^3}{MC^3}+\frac{NC^3}{NA^3}+\frac{PA^3}{PB^3}=3$, să se arate că Q este centrul de greutate al triunghiului.

Prof. ***Petre Guțescu***

❖Soluție

Vom folosi identitatea:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]. \quad (*)$$

Cum AM, BN, CP sunt concurente, din teorema lui Ceva, avem

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=1. \quad (1)$$

Relația din enunț, folosind (1), se scrie: $\frac{MB^3}{MC^3}+\frac{NC^3}{NA^3}+\frac{PA^3}{PB^3}-3\cdot\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=0,$

adică, folosind (*),

$\frac{1}{2}\left(\frac{MB}{MC}+\frac{NC}{NA}+\frac{PA}{PB}\right)\left[\left(\frac{MB}{MC}-\frac{NC}{NA}\right)^2+\left(\frac{NC}{NA}-\frac{PA}{PB}\right)^2+\left(\frac{PA}{PB}-\frac{MB}{MC}\right)^2\right]=0.$ Cum

$\frac{MB}{MC}+\frac{NC}{NA}+\frac{PA}{PB}>0,$ obținem $\left(\frac{MB}{MC}-\frac{NC}{NA}\right)^2+\left(\frac{NC}{NA}-\frac{PA}{PB}\right)^2+\left(\frac{PA}{PB}-\frac{MB}{MC}\right)^2=0,$ de unde $\frac{MB}{MC}=\frac{NC}{NA}=\frac{PA}{PB}.$

Folosind (1) obținem $\frac{MB}{MC}=\frac{NC}{NA}=\frac{PA}{PB}=1,$ de unde $MB=MC, NC=NA, PA=PB,$ adică $[AM],[BN],[CP]$ sunt medianele triunghiului ABC. Deci Q este centrul de greutate al triunghiului.

9.3) Se consideră numerele $a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$ astfel încât $a_0=2$, $a_1=5$, $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$, $(\forall)n\in N$. Să se demonstreze că $a_n=2^n+3^n$, $(\forall)n\in N$.

Prof. ***Muscalu Adrian***

❖Soluție

Verificam ca $a_0=2^0+3^0$ si $a_1=2^1+3^1$.

Pasul de inductie: Presupunem ca $a_{n+1}=2^{n+1}+3^{n+1}$ si $a_n=2^n+3^n$. Atunci $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n=5\cdot2^{n+1}+5\cdot3^{n+1}-6\cdot2^n-6\cdot3^n=2^n(2\cdot5-6)+3^n(5\cdot3-6)=2^{n+2}+3^{n+2}$

9.4) Dacă $a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2,a_3,b_3,c_3$ sunt numere reale nu toate nule şi există egalitățile:

$a_1=b_2c_3-c_2b_3$; $b_1=c_2a_3-a_2c_3$; $c_1=a_2b_3-b_2a_3$
$a_2=b_3c_1-c_3b_1$; $b_2=c_3a_1-a_3c_1$; $c_2=a_3b_1-b_3a_1$
$a_3=b_1c_2-c_1b_2$; $b_3=c_1a_2-a_1c_2$; $c_3=a_1b_2-b_1a_2$

să se deducă si egalitățile:

$a_1^2+b_1^2+c_1^2=a_2^2+b_2^2+c_2^2=a_3^2+b_3^2+c_3^2=1$
$a_1^2+a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2=c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$
$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3=0$
$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0$

Prof. ***Buga Viorel***

❖Soluție

Inmulțim $a_1=b_2c_3-c_2b_3$ cu a_2, $b_1=c_2a_3-a_2c_3$ cu b_2 si $c_1=a_2b_3-b_2a_3$ cu c_2 şi adunăm rezultatele. Rezultă că $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=a_2b_2c_3-a_2c_2b_3+b_2c_2a_3-a_2b_2c_3+a_2c_2b_3-b_2c_2a_3=0$

Inmulțim $a_1=b_2c_3-c_2b_3$ cu a_3, $b_1=c_2a_3-a_2c_3$ cu b_3 si $c_1=a_2b_3-b_2a_3$ cu c_3 şi adunăm rezultatele. Rezultă că $a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3=a_3b_2c_3-a_3c_2b_3+c_2a_3b_3-a_2c_3b_3+a_2b_3c_3-b_2a_3c_3=0$

Inmulțim $a_2=b_3c_1-c_3b_1$ cu a3 $b_2=c_3a_1-a_3c_1$ cu b3 $c_2=a_3b_1-b_3a_1$ cu c3 şi adunăm rezultatele. Rezultă că $a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=a_3b_3c_1-a_3c_3b_1+b_3c_3a_1-a_3b_3c_1+a_3c_3b_1-b_3c_3a_1=0$

Inmulțim $a_1=b_2c_3-c_2b_3$ cu b_1, $a_2=b_3c_1-c_3b_1$ cu b_2 si $a_3=b_1c_2-c_1b_2$ cu b_3 şi adunăm rezultatele. Rezultă că $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=b_1b_2c_3-b_1c_2b_3+b_2b_3c_1-b_1b_2c_3+b_1c_2b_3-c_1b_2b_3=0$

Inmulțim $a_1=b_2c_3-c_2b_3$ cu c_1, $a_2=b_3c_1-c_3b_1$ cu c_2 si $a_3=b_1c_2-c_1b_2$ cu c_3 şi adunăm rezultatele. Rezultă că $a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=c_1b_2c_3-c_1c_2b_3+c_2b_3c_1-b_1c_2c_3+b_1c_2c_3-c_1b_2c_3=0$

Inmulțim $b_1=c_2a_3-a_2c_3$ cu c_1, $b_2=c_3a_1-a_3c_1$ cu c_2 si $b_3=c_1a_2-a_1c_2$ cu c_3 şi adunăm rezultatele. Rezultă că $b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=c_2a_3c_1-a_2c_3c_1+c_3a_1c_2-a_3c_1c_2+c_1a_2c_3-a_1c_2c_3=0$

Ridicam la patrat relatiile $a_1=b_2c_3-c_2b_3$; $b_1=c_2a_3-a_2c_3$; $c_1=a_2b_3-b_2a_3$ si obtinem

$a_1^2+b_1^2+c_1^2=(b_2c_3-c_2b_3)^2+(c_2a_3-a_2c_3)^2+(a_2b_3-b_2a_3)^2=(a_2^2+b_2^2+c_2^2)(a_3^2+b_3^2+c_3^2)-(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)^2=(a_2^2+b_2^2+c_2^2)(a_3^2+b_3^2+c_3^2)$

Obținem analog $a_2^2+b_2^2+c_2^2=(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_3^2+b_3^2+c_3^2)$

si $a_3^2+b_3^2+c_3^2=(a_2^2+b_2^2+c_2^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)$

de aici se obtine $a_1^2+b_1^2+c_1^2=a_2^2+b_2^2+c_2^2=a_3^2+b_3^2+c_3^2=1$

Apoi $a_1^2+a_2^2+a_3^2=(b_2c_3-c_2b_3)^2+(b_3c_1-c_3b_1)^2+(b_1c_2-c_1b_2)^2=(b_1^2+b_2^2+b_3^2)(c_1^2+c_2^2+c_3^2)-(b_1c_2+b_2c_2+b_3c_3)^2=(b_1^2+b_2^2+b_3^2)(c_1^2+c_2^2+c_3^2)$

Obținem analog $b_1^2+b_2^2+b_3^2=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(c_1^2+c_2^2+c_3^2)$

si $c_1^2+c_2^2+c_3^2=(b_1^2+b_2^2+b_3^2)(a_1^2+a_2^2+a_3^2)$

de unde rezultă $a_1^2+a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2=c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$

9.5) Ştiind că $x^5-x^3+x=2$, unde x este un număr real, demonstrați următoare dublă inegalitate: $3^{1/2}<x^3<2$

Prof. ***Buga Viorel***

❖Soluție

Vom arata ca functia $f:R\to R$, $f(x)=x^5-x^3+x$ este strict crescatoare pe R

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{x^5-y^5}{x-y}-\frac{x^3-y^3}{x-y}+\frac{x-y}{x-y}=\frac{(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)}{x-y}-$$

$$-\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x-y}+\frac{x-y}{x-y}=\left(\frac{x^4}{2}+x^3y+\frac{x^2y^2}{2}+x^2y^2+xy^3+\frac{y^4}{2}\right)-\left(x^2+xy+y^2\right)+\frac{1}{2}+$$

$$\left(\frac{x^4}{2}-x^2y^2+\frac{y^4}{2}\right)+\left(\frac{x^2y^2}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}{2}-\left(x^2+xy+y^2\right)+\frac{1}{2}+\frac{\left(x^2-y^2\right)^2}{2}+$$

$$\left(\frac{x^2y^2}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(x^2+xy+y^2-1\right)^2}{2}+\frac{\left(x^2-y^2\right)^2}{2}+\left(\frac{x^2y^2}{2}+\frac{1}{2}\right)>0\Rightarrow$$ f este strict crescatoare

Prin calcul se arata ca $f\left(\sqrt[6]{3}\right)<2$ si $f\left(\sqrt[3]{2}\right)>2$. Prin urmare, daca f(x)=2 atunci $\sqrt[6]{3}<x<\sqrt[3]{2}\Rightarrow 3^{1/2}<x<2$

CLASA a X a

10.1) Arătaţi că, dacă z este un numar complex, atunci $|1+z|+|1+z+z^2|\geq 1$. Când are loc egalitatea?

Concursul Naţional de Matematică "Laurenţiu Panaitopol:- Tulcea 2014

❖Soluție

Dacă $|z| > 1$, atunci $|1 + z| + |1 + z + z^2| \geq |1 + z + z^2 - (1 + z)| = |z^2| > 1$.

Dacă $|z| \leq 1$, atunci $|1 + z| + |1 + z + z^2| \geq |1 + z| + 1 - |z + z^2| = 1 + |1 + z|(1 - |z|) \geq 1$.

Egalitatea are loc când $|1 + z + z^2| = 1 - |z + z^2|$ şi $|1 + z|(1 - |z|) = 0$. Una din situațiile în care aceasta se întâmplă este dacă $z = -1$
Cealaltă situație are loc când $|z| = 1$, $z + z^2$ are argumentul π şi $|z + z^2| \leq 1$. Notând $a = \arg z$, aceasta revine la $\sin a + \sin 2a = 0$ şi $\cos a + \cos 2a \leq 0$. Cum $\sin a + \sin 2a = \sin a(1 + 2\cos a)$, rezultă posibilitățile $\sin a = 0$, $\cos a = -1$, corespunzând lui $z = -1$, şi $\cos a = -\frac{1}{2}$, corespunzând lui $z = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

10.2) Să se rezolve, în numere reale, ecuația : $m \cdot \arcsin x + k = [nx]$, unde "$m$" este număr real strict pozitiv, "n" este număr natural nenul și "k" număr întreg .

([ ] reprezintă funcția "partea întreagă")

Prof. ***Petre Guțescu***

❖**Soluție**

Fie $x \in \left[\frac{k+p}{n}, \frac{k+p+1}{n}\right)$, $p \in Z \Leftrightarrow nx \in [k+p, k+p+1) \Leftrightarrow [nx] = k+p.$

Ecuatia din enunt devine : $m \cdot \arcsin x + k = k + p \Leftrightarrow \arcsin x = \frac{p}{m}$. (1)

Cum $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pentru orice $x \in [-1,1]$ este necesar ca $\frac{p}{m} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \le \frac{p}{m} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$-\frac{m\pi}{2} \le p \le \frac{m\pi}{2}$ si cum $p \in Z$ obtinem ca $p \in \left[-\left[\frac{m\pi}{2}\right], \left[\frac{m\pi}{2}\right]\right] \cap Z.$

Din (1) obtinem ca $x = \sin \frac{p}{m}$ si impunand sa fie verificata ecuatia initiala obtinem :

$m \cdot \frac{p}{m} + k = \left[n \cdot \sin \frac{p}{m}\right] \Leftrightarrow k = \left[n \cdot \sin \frac{p}{m}\right] - p.$

Discuție

1) Pentru $k = \left[n \cdot \sin \frac{p}{m}\right] - p$, $p \in \left\{-\left[\frac{m\pi}{2}\right], -\left[\frac{m\pi}{2}\right]+1, \ldots, \left[\frac{m\pi}{2}\right]\right\}$ ecuatia are solutia $x = \sin \frac{p}{m}$.

2) Pentru $k \in Z \setminus \left\{\left[n \cdot \sin \frac{p}{m}\right] - p \;\middle|\; p \in \left\{-\left[\frac{m\pi}{2}\right], -\left[\frac{m\pi}{2}\right]+1, \ldots, \left[\frac{m\pi}{2}\right]\right\}\right\}$, ecuatia nu are solutii.

Cu aceasta, soluția este încheiată.

10.3) Dacă a,b,c>0, să se arate că: $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \ge \sqrt[3]{abc}$

❖Soluție

Aratam ca $\frac{a^2+b^2}{a+b} \ge \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2a^2+2b^2 \ge (a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$, este adevarat.

Din inegalitatea mediilor avem $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ si cum $\frac{a^2+b^2}{a+b} \ge \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{a+b} \ge \sqrt{ab}$ (1)

Analog $\frac{b^2+c^2}{b+c} \ge \sqrt{bc}$ (2) si $\frac{a^2+c^2}{a+c} \ge \sqrt{ac}$ (3). Din (1), (2) si (3) $\Rightarrow$

$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \ge \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$ (4)

Din nou cu inegalitatea medilor avem: $\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}}{3} \ge \sqrt[3]{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ac} \cdot \sqrt{bc}} = \sqrt[3]{abc}$ (5)

Din (4) si (5) se obtine $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \ge 3\sqrt[3]{abc}$

CLASA a XI a

11.1) Fie A, B, C matrice de ordin 2 cu elemente întregi astfel încât $A^2 = BC$, $B^2 = CA$ şi $C^2=AB$
a) Arătaţi că $A^3 = B^3 = C^3$
b) Daţi exemplu de matrice A, B, C distincte două câte două având proprietatea din enunţ.

Concursul Naţional de Matematică "Laurenţiu Panaitopol:- Tulcea 2014

❖Soluție

a) Avem $A^3 = (A^2)A = (BC)A = B(CA) = B(B^2) = B^3$şi $B^3 =CAB = C^3$

b) De exemplu, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, B=A2, C=A3=$I_2$

11.2) Se consideră matricea

$$A=\begin{pmatrix} e^{2a}+e^{a}+1 & e^{2b}+e^{b}+1 & e^{2c}+e^{c}+1 \\ e^{x}+e^{2a+z}+e^{a+y} & e^{x}+e^{2b+z}+e^{b+y} & e^{x}+e^{2c+z}+e^{c+y} \\ e^{2x}+e^{a+2y}+e^{2(a+z)} & e^{2x}+e^{b+2y}+e^{2(b+z)} & e^{2x}+e^{c+2y}+e^{2(c+z)} \end{pmatrix}, a,b,c,x,y,z \in \boldsymbol{R}.$$

Să se calculeze det(A).

Prof. ***Petre Guțescu***

❖Soluție

Considerăm matricele $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{x} & e^{y} & e^{z} \\ e^{2x} & e^{2y} & e^{2z} \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{a} & e^{b} & e^{c} \\ e^{2a} & e^{2b} & e^{2c} \end{pmatrix}$. Avem $A=B\cdot C$, de unde $\det(A)=\det(B)\cdot\det(C)=(e^{y}-e^{x})(e^{z}-e^{y})(e^{z}-e^{x})(e^{b}-e^{a})(e^{c}-e^{b})(e^{c}-e^{a})$ ($\det(B)$ și $\det(C)$ sunt determinanți Vandermonde).

11.3) Să se arate că funcţia f:R→R, $f(x)=\dfrac{x^2+x+\sin x}{x^2+2x+\cos x}$ este mărginită.

❖Soluție

Numărătorul și numitorul fracției sunt funcții continue ca sumă de funcții elementare. Funcția f este continuă, fiind raport de funcții continue

$$-1\le \sin x\le 1\Rightarrow -\frac{1}{x^2}\le \frac{\sin x}{x^2}\le \frac{1}{x^2}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}-\frac{1}{x^2}\le \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}\le \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0$$

Analog $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x^2}=0$ **și** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2}=0$

Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+\sin x}{x^2+2x+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{\cos x}{x^2}\right)}=1$ **și** la fel $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

Din $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1\Rightarrow$există o vecinătate V=(a,∞) a lui ∞ astfel incât 0<f(x)<2 pentru orice x∈V (1)

Analog exista o vecinătate W=(-∞;b) a lui -∞ astfel încât 0<f(x)<2 pentru orice x∈W (2)

Functia f fiind continuă ea este mărginită pe intervalul [a;b], conform teoremei lui Wierstrasse. Există atunci k∈R astfel încât |f(x)|<k pentru orice x∈[a,b] (3)

Fie M=max(2,k). Din (1), (2) si (3) Rezultă că |f(x)|<M pentru orice x∈R deci f este mărginită

CLASA a XII a

12.1) Fie (G, ·) un grup cu proprietatea că oricare ar fi x, y ∈ G, x≠e, există n∈N* – care depinde de x şi de y, astfel încât $x^n = y$ (e este elementul neutru al grupului). Arătaţi că:

a) G este finit

b) Numărul elementelor lui G este număr prim.

c) Orice grup cu un număr prim de elemente are proprietatea din enunţ.

Concursul Naţional de Matematică "Laurenţiu Panaitopol:- Tulcea 2014

❖Soluție

a) Fie x≠ e şi <x>subgrupul său generat în G. Cum pentru orice y ∈ G există n ∈ N* astfel încât $x^n = y$, deducem că G = <x>, deci G este ciclic. Cum există m ∈ N* astfel încât $x^m = e$, deducem că ordinul lui x este finit, deci G este finit.

b) Fie p ordinul lui G. Cum orice grup ciclic are ϕ(p) generatori, iar din punctul a) rezultă că orice element nenul e generator al lui G, obținem ϕ(p) = p − 1, i.e. p este prim.

c) Fie G un grup cu p elemente, p prim şi x≠e un element al grupului. Avem G ={e, x, x^2, . . . , e^{p-1}}. Cum orice element din G este de forma x^n , n = 1, 2, . . . , p − 1, iar $(Z_p, \cdot)$ este grup, rezultă că G are proprietatea din enunţ.

12.2) Să se calculeze integrala $I=\int_0^2 \frac{\left(x^3-3x^2+4x-2\right)\cdot\sin\left(x^2-2x+2\right)\cdot\operatorname{arctg}\left(x^2-2x+3\right)}{\sqrt{x^2-2x+4}}\mathrm{dx}.$

Prof. ***Petre Guțescu***

❖Soluție

Avem: $I=\int_0^2 \frac{\left[(x-1)^3+(x-1)\right]\cdot\sin\left[(x-1)^2+1\right]\cdot\operatorname{arctg}\left[(x-1)^2+2\right]}{\sqrt{(x-1)^2+3}}\mathrm{dx}.$ Făcând substituția $x-1=t$, obținem $I=\int_{-1}^1 \frac{\left(t^3+t\right)\cdot\sin\left(t^2+1\right)\cdot\operatorname{arctg}\left(t^2+2\right)}{\sqrt{t^2+3}}\mathrm{dx}.$ Cum funcția de sub integrală este impară, obținem $I=0.$