CLASA a V a

5.13) Sa se afle suma cifrelor numarului $234\cdot10^{500}-123$

❖Soluție

$234\cdot10^{500}-123=2349999...877$. Din cele 503 cifre ale numarului 497 sunt egale cu 9. Suma cifrelor numarului este $497\cdot9+2+3+4+8+7+7=4504$

5.14) Fie $m = 1\cdot7 + 2\cdot8 + 3\cdot9 +\ldots+ 32\cdot38$ si $n = 1\cdot10 + 2\cdot11+ 3\cdot12 +\ldots+ 32\cdot41$. Calculaţi $n-m$

❖Soluție

$n-m=1\cdot(10-7)+2\cdot(11-8)+3\cdot(12-9)+\ldots+32\cdot(41-38)=3(1+2+3+\ldots+32)=792$

5.15) Fie sirul de numere naturale: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, … a) Aflati al 2007−lea termenului al sirului b) Aflati suma primilor 2007 termeni ai sirului.

❖Soluție

a) Se observa ca din sir lipsesc numerele 3,6,9,…Al 2006 lea termen al sirului este $1003\cdot3-1=3008$ si atunci al 2007 lea numar este 3010

b) Suma primilor 2006 termeni este $(1+2+3+\ldots+3009)-(3+6+9+\ldots3009)=(1+3009)\cdot3009/2-3\cdot(1+1003)\cdot1003/2=3018027$
Atunci suma primilor 2007 termeni este $3018027+3010=3021037$

5.16) Un container cu apa cantareste 80 kg. Plin pe jumatate cantareste 41 kg. Cat cantareste containerul gol ?

❖Soluție

Doua cotainere pline pe jumatate cantaresc impreuna 82 kg. Ele au tot atata apa cat containerul plin. Diferenta 82-80 este data de masa unui cotainer care este de 2 kg

5.17) În două clase sunt 64 elevi. Dacă s−ar muta 3 elevi din prima clasă în cealaltă clasă, prima ar avea cu 2 elevi mai mult. Câţi elevi sunt în fiecare clasă?

❖Soluție

Dupa mutare prima clasa are cu doi mai multi elevi. Daca notam cu x numarul elevilor din a doua clasa obtinem $2x+2=64\Rightarrow x=31$. Atunci inainte de mutare a doua clasa avea 28 de elevi si prima 36 elevi

5.18) Se considera multimile A={a;b;c;d} si S={s∈N|s=x+y, x∈A, y∈A si x≠y}. Se stie că S={82,96,104,112,126}

a) Calculati suma elementelor din multimea A

b) Determinati elementele multimii A

❖Soluție

a) Presupunem ca a<b<c<d si pentru ca S are 5 elemente aratam ca a+d=b+c. Atunci S={a+b, a+c, a+d, b+d ,c+d} si a+b+c+d=208

b) a=37; b=45; c=59 si d=67

5.19) Se dau multimile A={n^2|n∈N} si B={5n+2|n∈N} Calculati A∩B

❖Soluție

Ultima cifra a unui element din A poate fi 0;1;4;6 sau 9 iar ultima cifra pentru un element din B poate fi 2 sau 7.Atunci A∩B=∅

5.20) Spunem ca o multime este ″triunghiulara″ daca ea contine cel putin trei numere distincte a,b, c astfel încât a + c = 2b.Se dau multimile M = {1, 2,3,4,5,6,7,8} si P = {1,2,3, 4,5,6,7,8,9,10,11,12,13}

a) Sa se arate ca exista multimile A si B cu A∪B = M, A∩B =∅ astfel încât A si B sa nu fie ″triunghiulare″.

b) Sa se arate ca oricare ar fi multimle A si B cu A∪B = P, A∩B =∅, cel putin una dintre ele este ″triunghiulara″.

❖Soluție

a) A={1;3;6;8} si B={2;4;5;7}

b) Presupunem ca 6,7∈A⇒5,8∈B⇒11∈A⇒1∈B⇒3∈A si atunci 3+11=2·7 in A,deci A este triunghiulara.

Analog se arata ca daca 5 si 6 sunt in aceeasi multime se obtine o multime triunghiulara si la fel pentru 5 si 7 in aceeasi multime

5.21) Se considera numerele impare k,n_1 ,n_2 ,…,n_k. Sa se demonstreze ca printre numerele $\frac{n_1+n_2}{2}, \frac{n_2+n_3}{2}, ..., \frac{n_k+n_1}{2}$ exista un numar impar de numere impare

❖Soluție

Adunand toate numerele se obtine suma $n_1+n_2+…+n_k$, care este numar impar. Atunci un numar impar dintre ele sunt numere impare.

5.22) Un fermier vinde cireşe la trei cumpărători. Primului îi vinde jumătate din cantitate şi încă o jumătate de kg; celui de al doilea, jumătate din cantitatea rămasă şi încă o jumătate de kg, iar celui de al treilea, jumătate din cantitatea rămasă după plecarea celui de al doilea şi încă o jumătate de kg. Ştiind că după plecarea celui de al treilea cumpărător au mai rămas 3 kg de cireşe, se cere să se afle câte kg de cireşe a avut producătorul şi ce cantitate a cumpărat fiecare dintre cei trei cumpărători.

❖Soluție

Problema se rezolvă prin metoda mersului invers. Al treilea cumpărător a luat jumătate din cantitatea găsită și încă jumătate de kg. Cum au mai rămas 3 kg se deduce că el a găsit 7kg și a lăsat 3kg, deci a cumpărat 4 kg. Se deduce analog că producatorul a avut 31 kg și cei trei cumparatori au luat in ordine: 16 kg, 8 kg si 4 kg

Probleme selectate de prof. **Adrian Muscalu**

CLASA a VI a

6.14) Fie M mulţimea numerelor prime mai mari ca 3. Să se demonstreze că :
a) suma pătratelor oricăror 12 numere din M este multiplu de 12
b) printre oricare 3 numere din M există două cu diferenţa divizibilă la 6.

❖Soluție

a) Se arata ca orice astfel de numar este de forma 12k+1, 12k+5, 12k+7 si 12k+11 si patratul este de forma 12k+1⇒ suma pătratelor oricăror 12 numere din M este multiplu de 12
b) Se arata ca orice astfel de numar este de forma 6k+1 sau 6k+5⇒ printre oricare 3 numere din M există două cu diferenţa divizibilă la 6

6.15) Fie numerele x, y, z,t ∈ N care îndeplinesc condiţia :7x + 5y − 2z −2t = 0 . Să se arate că numărul n =(11x + 9y)(z+t−x) este divizibil cu 10.

❖Soluție

2z+2t se divide cu 2⇒2|7x+5y⇒2|11x+9y (1). Cum 5|5y⇒5|2z+2t−7x⇒5|2z+2t+2x⇒5|2(z+t−x)⇒5|z+t−x (2). Din (1) si (2)⇒10|n

6.16) Sa se afle cel mai mare divizor comun al numerelor A=5n+3 si B=(3n+2)(2n+1)

❖Soluție

Daca p|5n+3 si p|3n+2⇒p|5(3n+2)−3(5n+3)⇒p|1⇒p=1. Singurul divizor comun al celor doua numere este 1⇒5n+3 si 3n+2 sunt prime intre ele. Daca p|5n+3 si p|2n+1⇒p|2(5n+3)−5(2n+1)⇒p|1⇒p=1. Singurul divizor comun al celor doua numere este 1⇒5n+3 si 2n+1 sunt prime intre ele. Atunci A si B sunt prime intre ele, deci (A,B)=1

6.17) Se consideră mulţimea M = {1, 2, 3,…, 10}.
a) Să se arate că mulţimea M nu se poate împărţi în două submulţimi A ¸si M\A astfel încât produsul elementelor din A să fie egal cu produsul elementelor din M\A.
b) Să se determine un element x din mulţimeaM astfel încât mulţimeaM\{x} să se poată împărţi ?n două submulţimi A Şi M\{x}\A astfel încât produsul elementelor din A să fie egal cu produsul elementelor din M\{x}\A.

❖Soluție

a) Numai una din cele doua multimi contine numarul 7⇒unul din produse este divizibil cu 7 si celalat nu, deci nu pot fi egale

b) Un exemplu de partiţie a mulţimii M\{7} este: {1, 2, 3, 4, 5, 6} și {8, 9, 10}

6.18) Să se demonstreze că numărul $n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 70\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{70}\right)$ este divizibil cu 71.

❖Soluție

$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 70\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{70}\right)=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 70\left(1+\frac{1}{70}+\frac{1}{2}+\frac{1}{69}+\ldots+\frac{1}{35}+\frac{1}{36}\right)=$

$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 70\left(\frac{71}{70}+\frac{71}{2\cdot 69}+\ldots+\frac{71}{35\cdot 36}\right)=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 70\cdot 71\left(\frac{1}{70}+\frac{1}{2\cdot 69}+\ldots+\frac{1}{35\cdot 36}\right)$ este divizibil cu 71

pentru ca numarul $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 70\left(\frac{1}{70}+\frac{1}{2\cdot 69}+\ldots+\frac{1}{35\cdot 36}\right)$ este numar natural

6.19) Aflaţi numărul natural a de trei cifre, ştiind că S·a este număr natural, unde

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 11}+\cdots+\frac{15}{106\cdot 121}$$

❖Soluție

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 11}+\cdots+\frac{15}{106\cdot 121}$$

$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{106}-\frac{1}{121}=\frac{120}{121}$. Pentru $S\cdot a\in\mathbb{N}$ şi cum a este de trei cifre, avem $a\in\{121,242,363,484,605,726,847,968\}$

6.20) Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+5}{3}+\frac{x+11}{4}+\frac{x+19}{5}+\frac{x+29}{6}=15$$

❖Soluție

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+5}{3}+\frac{x+11}{4}+\frac{x+19}{5}+\frac{x+29}{6}=15\Rightarrow\frac{x+1}{2}-1+\frac{x+5}{3}-2+\frac{x+11}{4}-3+\frac{x+19}{5}-4+\frac{x+29}{6}-5=0\Rightarrow$$

$$\frac{x-1}{2}+\frac{x-1}{3}+\frac{x-1}{4}+\frac{x-1}{5}+\frac{x-1}{6}=0\Rightarrow x=1$$

6.21) Rezolvati ecuatia |x−1|+|x−2|+|x−3|+…+|x−2102|=2013(x−2013)

❖Soluție

Deoarece modulele sunt mai mari sau egale cu 0⇒x−2013 ≥0⇒x ≥2013. Atunci ecuatia devine x−1+x−2+x−3+…+x−2012=2013x−20132⇒x=2103·1007

6.22) Pe laturile [Ox si [Oy ale unghiului xOy se considera punctele A,B,C≡[Ox, M,N.P≡[Oy astfel incat OA=OM, OB=ON si OC=OP. Daca {S}=AN∩BM si {T}=AP∩CM sa se arate ca punctele A, S si T sunt coliniare

❖Soluție

Se arata ca ΔOAN≡ΔOMB(LUL), ΔSAB≡ΔSMN(ULU), ΔOSA≡ΔOSM(LLL). Se deduce ca [OS este bisectoarea unghiului xOy
Analog se arata ca [OT este bisectoarea unghiului xOy si atunci punctele A, S si T sunt coliniare

6.23) Fie *d* o dreaptă şi *A* şi *B* două puncte fixe , de o parte şi de alta a dreptei *d*. Spunem că un punct *M* ∈*d* are proprietatea *p* dacă [*AM*]≡[*MB*] . Demonstraţi că dacă pe dreapta *d* există două puncte cu proprietatea *p*, atunci toate punctele dreptei au proprietatea *p*.

❖Soluție

Dacă M are proprietatea p atunci M se află pe mediatoarea dreptei d. Dacă doua puncte de pe dreapta d au proprietatea p atunci d este mediatoarea segmentului [AB] și toate punctele sale sunt egal depărtate de capetele segmentului, deci au proprietatea p.

Probleme selectate de prof. **Adrian Muscalu**

CLASA a VII a

7.14) Rezolvaţi ecuaţia

$$\frac{1}{1}\left(\frac{x}{2012}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2012}+\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2012}+\frac{3}{4}\right)+\ldots+\frac{1}{2012}\left(\frac{x}{2012}+\frac{2012}{2013}\right)=\frac{x}{2013}$$

❖Soluție

Ecuaţia este echivalentă cu: $\frac{x}{2012}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots+\frac{1}{2013}=\frac{x}{2013}$

$$\frac{x}{2012}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}\right)+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}=\frac{x}{2013}-\frac{1}{2013}+1$$

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}\right)\left(\frac{x}{2012}+1\right)=\frac{x+2012}{2013}$$

$$(x+2012)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}-\frac{2012}{2013}\right)=0$$

$$(x+2012)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}\right)=0$$

Cum $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}>0$, rezultă soluţia ecuaţiei este -2012.

7.15) Considerăm primele zece numere naturale prime luate în ordine strict crescătoare, p_1, p_2 ,..., p_{10} . Demonstraţi că $\frac{1}{p_1p_2}+\frac{1}{p_2p_3}+\frac{1}{p_3p_4}+\ldots+\frac{1}{p_9p_{10}}<\frac{14}{29}$

❖Soluție

Avem $p_1=2, p_2=3, p_3=5,\ldots, p_{10}=29$, deci

$$\frac{1}{p_1p_2}+\frac{1}{p_2p_3}+\frac{1}{p_3p_4}+\ldots+\frac{1}{p_9p_{10}}\le\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{23\cdot 29}.=\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_{10}}$$

obţinem $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{23\cdot 29}<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{23}-\frac{1}{29}=\frac{1}{2}-\frac{1}{29}$

Cum $\frac{1}{2}-\frac{1}{29}=\frac{14}{29}$, rezultă concluzia.

7.16) Se consideră numărul $a=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}$ **Demonstraţi că** $0{,}2<\sqrt{\frac{a}{11}}<0{,}3$

❖Soluție

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{100\cdot 101}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}\Rightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{101}<a<$$

$$\Rightarrow\frac{9}{202}<\frac{a}{11}<\frac{9}{100}\Rightarrow 0{,}2<\sqrt{\frac{a}{11}}<0{,}3$$

7.17) Să se calculeze: $S_1=\sqrt{\sqrt{[1\cdot 3]}+\sqrt{[3\cdot 5]}+\sqrt{[5\cdot 7]}+\ldots+\sqrt{[2011\cdot 2013]}}$ **unde [x] este partea întreagă a numărului real x**

❖Soluție

Aplicand inegalitatea mediilor se obtine $1<\sqrt{1\cdot 3}<\frac{1+3}{2}\Rightarrow\left[\sqrt{1\cdot 3}\right]=1$. Analog $\left[\sqrt{1\cdot 3}\right]=3,\ldots,\left[\sqrt{2011\cdot 2013}\right]$

Atunci $S_1=\sqrt{1+3+5+\ldots+2011}=\sqrt{(1+2011)\cdot 1006:2}=\sqrt{1006^2}=1006$

7.18) Daca $a^2+b^2-2\sqrt{2}a-2\sqrt{3}b=-5$ **sa se arate ca** $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)(b-a)=1$

$$\left(a-\sqrt{2}\right)^2+\left(b-\sqrt{3}\right)^2=0\Rightarrow a=\sqrt{2},\ b=\sqrt{3}\Rightarrow\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)(b-a)=1$$

❖Soluție

7.19) Sa se arate ca a) $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ b) $\sqrt{\frac{x+y}{2}}\geq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$ **pentru orice numere pozitive x si y. Cand au loc egalitatile?**

❖Soluție

a) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0$, este adevarat. Egalitatea are loc pentru x=y

b) Se ridica la patrat si se obtine $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0$, este adevarat. Egalitatea are loc pentru x=y

7.20) Pe laturile AB şi AC ale triunghiului echilateral ABC se construiesc în exterior pătratele ABMN şi ACPQ.Fie T intersecţia dintre NC şi BQ , iar P intersecţia dintre NC şi BP.Demonstraţi:

- **a) [NC] = [BQ]= [BP]**
- **b) NC perpendicular pe BQ**
- **c) BS=2TS**

❖Soluție

a) Se arata ca $\Delta ABQ \equiv \Delta NBC \equiv \Delta BCP$
b) Se calculeaza m(BNC)=15° si m(NBQ)=75°. Se deduce ca $NC \perp BQ$
c) Se arata ca ΔBTS este dreptunghic cu un unghi de 30° de unde concluzia

Fie E, F, G,H picioarele perpendicularelor din O pe AB, BC, CD si AD. Se observa ca OF+OH=AB si OG+OE=AD.

$S_{AOB}+S_{COD}=\frac{OE\cdot AB}{2}+\frac{OG\cdot CD}{2}=\frac{AB(OE+OG)}{2}=\frac{AB\cdot AD}{2}$. Analog $S_{AOD}+S_{COB}=\frac{AB\cdot AD}{2}$.

Atunci $S_{AOB}+S_{COD}=S_{AOD}+S_{COB} \Rightarrow 15+10=S_{AOD}+5 \Rightarrow S_{AOD2}$

7.21) O dreapta dusa prin centrul de greutate G al triunghiului ABC intersecteaza laturile [AB] si [AC] in punctele P, respectiv Q, iar paralelele prin B si C la AG in D si E

- **a) Sa se arate ca BD+CE=AG**
- **b) Dacă P=B atunci AGCE este paralelogram**

❖Soluție

a) Daca M este mijlocul lui BC atunci GM este linie mijlocie in trapezul BEFC$\Rightarrow$GM=(BD+CE)/2. AG=2GM=BD+CE
b) M fiind mijlocul lui [BC] si GM||CE$\Rightarrow$GM este linie mijlocie in ΔBCE$\Rightarrow$CE=2GM. Cum AG=2GM$\Rightarrow$AG=CE si AG||CE$\Rightarrow$AGCE este paralelogram

7.22) În rombul *ABCD* bisectoarele unghiurilor *CAD* , *CBD* si dreapta *DC* sunt concurente în *E*.
a) Determinați măsura unghiului *AEB* ;
b) Aflați măsurile unghiurilor rombului.

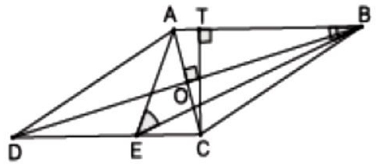
❖Soluție

a) Notăm $m\left(\widehat{DAC}\right)=2x^\circ$. Atunci $m\left(\widehat{BAE}\right)=3x^\circ$, iar

$$m\left(\widehat{ABE}\right)=m\left(\widehat{ABD}\right)+m\left(\widehat{DBE}\right)=90^\circ-2x^\circ+\frac{90^\circ-2x^\circ}{2}=135^\circ-3x^\circ.$$

Din suma unghiurilor în triunghiul *ABE*, rezultă că $m\left(\widehat{AEB}\right)=45^\circ$.

b) În triunghiurile *BCD* şi *CAD*, *(BE* respectiv *(AE* sunt bisectoare. Conform teoremei bisectoarei obținem:



$$\frac{BC}{BD}=\frac{EC}{ED}=\frac{AC}{AD}$$

Rezultă că $BC\cdot AD=BD\cdot AC$

Echivalent cu $BC\cdot\frac{AB}{2}=\frac{BD\cdot AC}{2}=A_{ABCD}$

Dacă $CT\perp AB, T\in AB$, atunci $AB\cdot CT=AB\cdot\frac{BC}{2}=A_{ABCD}$, deci $CT=\frac{AB}{2}$.

Rezultă: $m(\widehat{BAD})=m(\widehat{BCD})=150^\circ$ şi $m(\widehat{ADC})=m(\widehat{ABC})=30^\circ$.

Obs. Dacă unghiul $\widehat{DAB}$ este ascuțit, atunci $m(\widehat{BAD})=m(\widehat{BCD})=30^\circ$ şi $m(\widehat{ADC})=m(\widehat{ABC})=150^\circ$.

Probleme selectate de prof. **Adrian Muscalu**

CLASA a VIII a

8.13) Fie $S_n = \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{1\cdot 2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{2\cdot 3}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}}$

Să se calculeze:1 +S $_{2014}$

❖Soluție

$$S_{2014} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2015}+\sqrt{2014}} = \sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{2015}-\sqrt{2014} =$$
$$= \sqrt{2015}-1 \Rightarrow 1+S_{2014} = \sqrt{2015}$$

8.14) Determinaţi toate perechile de numere întregi (x,y) care verifică egalitatea $6x^2-13xy+6y^2=6$

❖Soluție

$(3x-2y)(2x-3y)=6 \Rightarrow (2x-3y,3x-2y) \in \{(1,6),(2,3),(3,2),(6,1),(-1,-6),(-2,-3),(-3,-2),(-6,-1)\} \Rightarrow (x,y) \in \{(1,0),(0,-1),(-1,0),(0,1)\}$

8.15) Determinaţi valorile naturale ale lui m pentru care numerele 9m+7 şi 16m+1 sunt simultan pătrate perfecte

❖Soluție

$x^2=9m+7$, $y^2=16m+1 \Rightarrow 16x^2-9y^2=103 \Rightarrow (4x-3y)(4x+3y)=103$.
Cum$4x-3y<4x+3y \Rightarrow 4x-3y=1$, $4x+3y=103 \Rightarrow x=13$, $y=17 \Rightarrow m=18$

8.16) Aflaţi valoarea reala a numărului $E = x^4+x^3+x^2+x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}$ **ştiind că** $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3 = 64$

❖Soluție

Obţinem succesiv: $x-1/x=4$, $x^2+1/x^2=18$, $x^3-1/x^3=76$, $x^4+1/x^4=322$. Atunci E= 4 + 18 + 76+ 322 = 420

8.17) Aflati valoarea maxima a expresiei $\frac{3x^2+12x+22}{x^2+4x+6}$, x∈R

❖Soluție

$\frac{3x^2+12x+22}{x^2+4x+6}=3+\frac{4}{x^2+4x+6}=3+\frac{4}{(x+2)^2+2}$. Atunci cea mai mare valoare se obtine pentru x=−2 si este egala cu 5

8.18) Sa se determine f:R→R, daca f(1−x)+4f(x−4)=6x−25.

❖Soluție

Inlocuim x cu 5−x si obtinem f(x−4)+4f(1−x)=5−6x. Din cele doua relatii se afla f(1−x)=−2x+3, unde inlocuind x cu 1−x se obtine f(x)=2x−1

8.19) Fie paralelogramul ABCD si dreptele MA||BN||CP||DQ astfel incat punctele M, N, P si Q sa fie de aceasi parte a planului (ABC). Daca AM=8 cm, BN=12 cm, CP=22 cm si DQ=18cm sa se arate ca dreptele MP si QN sunt concurente

❖Soluție

Liniile mijlocii in trapezele ACPM si BNQD sunt de lungime 15 cm si sunt amandoua paralele cu AM. Deducem ca mijloacele segmentelor MP si NQ coincid

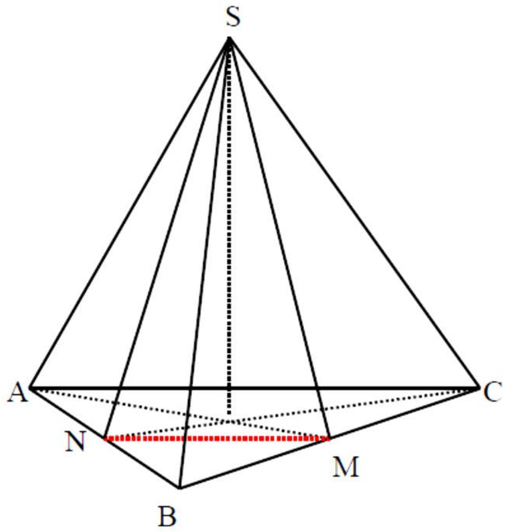
8.20) Suma celor trei dimensiuni ale unui paralelipiped dreptunghic este 1. Daca S este aria sa totala si d lungimea diagonalei sa se arate ca $6d^2+3S\geq 4$

❖Soluție

Daca a,b,c sunt dimensiunile paralelipipedului atunci inegalitatea devine $6(a^2+b^2+c^2)+6(ab+ac+bc)\geq 4(a+b+c)^2$. Se aduce inegalitatea la forma $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq 0$ si se observa ca este adevarata

8.21) Fie triunghiul echilateral ABC si S un punct exterior planului (ABC) astfel încât [SA] ≡ [SB] ≡ [SC]. Dacă M este mijlocul segmentului [BC] si măsura unghiului format de dreptele AC siSM este de 60□, demonstrați că SA⊥SM.

❖Soluție



SABC este piramidă regulată.
MN este linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow MN \parallel AC$.
SM şi SN sunt apoteme ale piramidei, deci SM = SN.
$\sphericalangle(SM, AC) = \sphericalangle(SM, MN) = \sphericalangle SMN$.
ΔSMN este isoscel şi $m(\sphericalangle SMN) = 60^\circ$, deci ΔSMN este echilateral.
Notăm $SM = SN = MN = a$. $AB = BC = AC = 2a$.

AM este înălțime în triunghiul echilateral ABC $\Rightarrow AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

În triunghiul dreptunghic SMC, $SM = MC = a \Rightarrow SC = a\sqrt{2} \Rightarrow SA = SB = SC = a\sqrt{2}$

$SM^2 + SA^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 = 3a^2 = (a\sqrt{3})^2 = AM^2$.

Conform reciprocei teoremei lui Pitagora, ΔSAM este dreptunghic, deci $SA \perp SM$.

8.22) Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată, având baza ABCD, cu măsura unghiului diedru corespunzător a două fețe laterale alăturate de 120º . Demonstrați că măsura unghiului dintre o față laterală şi planul bazei este de 45º .

❖Soluție

Fie DE⊥CV, se arată că m[(VBC),(VDC)]=120°. Notăm AB=a și calculăm $OE = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}, EC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, CV = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, VO = \dfrac{a}{2}$, m[(VBC),(ABC)]=m(VPO), unde P este mijlocul muchiei [BC]. Se arată că unghiul are 45°

Probleme selectate de prof. **Adrian Muscalu**