CLASA a IX – a

9.14) Determinaţi funcţia f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care satisface simultan proprietăţile:
a) $f(0) = 1$; b) $f(n) = f(n-1) + 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

❖Soluție

Dăm câteva valori lui n, intuim $f(n) = 2n + 1$ şi demonstrăm prin inducţie.

9.15) Fie f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietăţile:
(i) $f(1) = 1$;
(ii) $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [0, 1]$;
(iii) Dacă x, y şi $x + y$ sunt din $[0, 1]$, atunci $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$.
Demonstraţi că: $f(x) \leq 2x$, $\forall\, x \in [0, 1]$.

❖Soluție

Dacă $0 \leq x < y \leq 1$, folosim (iii) şi ajungem la $f(y) \geq f(x) + f(y - x)$; acum, din (ii), avem $f(y) \geq f(x)$, adică f este crescătoare. Pentru orice $x \in [\,0,\,1\,]$ avem şi $f(x) \geq f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) \geq 2f(\frac{x}{2})$, de unde, prin inducţie, obţinem: $f(x) \geq 2^n \cdot f(x \cdot 2^{-n})$, $\forall\, x \in [0,1]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; în particular obţinem $f(\frac{1}{2^n}) \leq \frac{1}{2^n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Punem $y = 0$ în ultima condiţie din enunţ şi avem $f(0) \leq 0$ şi cu a doua condiţie avem $f(0) = 0$. Pentru $x \in (0,1]$ alegem $n \in \mathbb{N}$ care satisface $\frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n}$, de unde imediat ajungem la concluzia cerută.

9.16) Să se determine funcţiile f: $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ pentru care avem:
$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{N}.$$

❖Soluție

Facem $x = y = 0$ şi obţinem imediat $f(0) = 0$; punem acum doar $x = 0$ şi avem $f(-y) = f(y)$, apoi $y = x$ conduce la $f(2x) = 4f(x)$, iar $y = 2x$ conduce la $f(3x) + f(x) = 2f(x) + 2f(2x)$, adică $f(3x) = 9f(x)$.
Demonstrăm prin inducţie:
$f(nx) = n^2 f(x)$, presupunând afirmaţia adevărată pentru $k \leq n$ şi obţinând ce trebuie pentru $k = n + 1$ (facem $y = kx$). Acum, dacă $n \in \mathbb{N}^*$, avem $f(x) = f(n\frac{x}{n}) = n^2 f(\frac{x}{n})$, deci $f(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n^2} f(x)$; pentru m, $n \in \mathbb{N}^*$ avem: $f(\frac{m}{n}) = m^2 f(\frac{1}{n}) = \frac{m^2}{n^2} f(1)$, adică $f(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{Q}$, $\forall\, x \geq 0$; deoarece f este pară avem $f(x) = ax^2$, $\forall\, x \in \mathbb{Q}$. Se verifică funcţiile obţinute în ecuația inițială.

9.17) Să se determine funcţiile $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ care satisfac condiţia:
$$2017 \cdot f\left(f\left(x\right)\right) + 2016 \cdot f\left(x\right) = x,\ \forall x \in \mathbf{Z}.$$

Petre Guțescu

❖Soluție

Adunând $f(x)$ în ambii membrii ai egalităţii din enunţ, obţinem:
$$f(x) + x = 2017 \cdot \left(f\left(f\left(x\right)\right) + f\left(x\right)\right) = 2017^2 \cdot \left(f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right) + f\left(f\left(x\right)\right)\right) = \ldots =$$

$$=2017^n\cdot\left(\left(\underbrace{f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n+1-ori}\right)(x)-\left(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n-ori}\right)(x)\right),\ \forall x\in\mathbf{Z},\ \forall n\in\mathbf{Z}.$$

Rezultă că $2017^n\,|\,(f(x)+x),\forall n\in\mathbf{N}$, de unde $f(x)+x=0,\forall x\in\mathbf{Z}$, şi de aici $f(x)=-x,\forall x\in\mathbf{Z}$.

9.18) Să se determine funcțiile monotone $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ care satisfac egalitatea $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{2017-ori}=1_{\mathbf{R}}$.

Petre Guțescu

❖Soluție

Fie $x,y\in\mathbf{R}$ cu $f(x)=f(y)$. Aplicând repetat, de 2016 ori, funcția f obținem:

$\left(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{2017\,ori}\right)(x)=\left(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{2017\,ori}\right)(y)\Leftrightarrow 1_R(x)=1_R(y)\Leftrightarrow x=y$, de unde funcția f este injectivă. Cum f este monotonă, deducem că f este strict monotonă.

Presupunem că f este strict descrescătoare. Cum 2017 este impar, obținem că $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{2017-ori}$ este strict descrescătoare, adică $1_{\mathbf{R}}$ este strict descrescătoare, fals. Deci f este strict crescătoare. Evident, $f=1_{\mathbf{R}}$ este o soluție a problemei.

Presupunem, prin absurd, că există $f\neq 1_{\mathbf{R}}$ soluție. Cum $f\neq 1_{\mathbf{R}}$, există $x_o\in\mathbf{R}$ astfel încât $f(x_o)\neq 1_{\mathbf{R}}(x_o)=x_0$.

Dacă $f(x_o)<x_o\Rightarrow f(f(x_o))<f(x_o)<x_o\Rightarrow\ldots\Rightarrow\left(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{2017-ori}\right)(x_o)<x_o\Rightarrow 1_R(x_o)<x_o\Rightarrow x_o<x_o$, fals.

Analog, $f(x_o)>x_o\Rightarrow x_o>x_o$, fals. Deci $f=1_{\mathbf{R}}$ este soluția unică a problemei.

9.19) a) Să se determine imaginea funcției $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, dată de $f(x)=\dfrac{2x}{x+1},\forall x\in[0,1]$.

b) Fie $a,b,c\in\mathbf{R},a\neq 0$. Să se arate că dacă ecuația $ax^2+bx+c=0$ are rădăcinile $x_1,x_2\in[0,1]$, atunci şi ecuația

$$(a-b+c)x^2+2(b-2c)x+4c=0$$

are rădăcinile în intervalul $[0,1]$.

❖Soluție

a) Funcția f este crescătoare, deci $f(0)\le f(x)\le f(1)\Leftrightarrow 0\le f(x)\le 1$ şi pentru orice $y\in[0,1]$ există $x=\dfrac{y}{2-y}\in[0,1]$ astfel încât $y=f(x)$. Prin urmare, $\operatorname{Im} f=[0,1]$.

b) Dacă $x_1,x_2\in[0,1]$, atunci $f(x_1),f(x_2)\in[0,1]$. Însă a doua ecuație are rădăcinile $y_1=f(x_1)$ şi $y_2=f(x_2)$.

9.20) Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, D piciorul înălțimii din A, iar M mijlocul lui $[AD]$. Notăm cu P proiecția lui M pe AB. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC să se arate că $PD \perp BG$.

❖Soluție

$PD \perp BG \Leftrightarrow \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$, unde $[BE]$ mediană în ΔABC.

În ΔAPD avem: $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DA} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{PA}$. $[BE]$ mediană$\Rightarrow \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$.

Atunci: $2 \cdot \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{PD} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{PA}\right) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{PA} = AB \cdot AD \cdot \cos\left(90^0 + B\right) +$
$+ BC \cdot AD \cdot \cos 90^0 + BA \cdot PA \cdot \cos 0^0 + BC \cdot PA \cdot \cos B = AB \cdot AD\left(-\sin B\right) + AB \cdot AP + BC \cdot AP \cdot \cos B =$
$AB \cdot \frac{AB \cdot AC}{BC} \cdot \left(-\frac{AC}{BC}\right) + AB \cdot AP + BC \cdot AP \cdot \frac{AB}{BC} = -\frac{b^2c^2}{a^2} + 2c \cdot AP$, dar $\frac{AP}{AF} = \frac{1}{2}$, $\left(F = pr_{AB} D\right)$,
deci $AP \cdot \frac{AF}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD^2}{AB} = \frac{b^2c^2}{2a^2c} = \frac{b^2c}{2a^2}$, deci $2 \cdot \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{PD} = -\frac{b^2c^2}{a^2} + 2c \cdot \frac{b^2c}{2a^2} = 0 \Rightarrow BG \perp PD$.

9.21) Se consideră triunghiul ABC. Să se determine $M \in (AC)$ pentru care suma $BM^2 + CM^2$ minimă.

❖Soluție

Cu teorema medianei avem că $2\left(MB^2 + MC^2\right) - BC^2 = 4MO^2$, unde O este mijlocul lui $[BC]$.
Minimul are loc pentru MO minim, deci când $OM \perp AC$.

***Probleme propuse și selectate de prof.* Petre Guțescu**

CLASA a X – A

10.12) Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{N}^* - \{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \log_{x+1} x$ este strict crescătoare.

❖Soluție

$f(n) < f(n+1), \forall n \geq 2 \Leftrightarrow \lg n \cdot \lg(n+2) < \ < \lg^2(n+1), \forall n \geq 2$. Folosind acum inegalitatea mediilor, avem: $\lg n \cdot \lg(n+2) < \left(\frac{\lg n + \lg(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\lg\sqrt{n^2 + 2n}\right)^2 < \lg^2(n+1)$.

10.13) Dacă $a>0, a\neq 1$, arătaţi că nu există funcţii $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ care satisfac $f(f(x)) = a^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

❖Soluție

Dacă $a > 1$, presupunem prin absurd că există o astfel de funcţie şi deducem:
$f(f(f(x))) = a^{f(x)} = f(a^x), \forall x \in \mathbb{R}$. Deoarece $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(y) > 1, \forall y > 0$ şi astfel $f(f(x)) > 1, \forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce este fals, deoarece funcţia $x \to a^x$ ia şi valori subunitare. Analog celălalt caz.

10.14) Fie $a,b,c,d \in \boldsymbol{R}, 1<a<b<c<d$. **Să se arate că:** $(ab)^{b-a} \cdot (bc)^{c-b} \cdot (cd)^{d-c} \ge (ad)^{d-a}$.

Petre Guțescu

❖Soluție

Funcția $f:(0,\infty) \to \boldsymbol{R}, f(x)=\ln x$ este concavă și ia valori pozitive pe $(1,\infty)$. Considerăm punctele $A(a,0), B(b,0), C(c,0), D(d,0), A'(a,\ln a), B'(b,\ln b), C'(c,\ln c), D'(d,\ln d)$. Avem:

$aria(ABB'A')+aria(BCC'B')+aria(CDD'C') \ge aria(ADD'A')$ (patrulaterele sunt trapeze) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(\ln a+\ln b)(b-a)}{2}+\frac{(\ln b+\ln c)(c-b)}{2}+\frac{(\ln c+\ln d)(d-c)}{2} \ge \frac{(\ln a+\ln d)(d-c)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b-a)\ln ab+(c-b)\ln bc+(d-c)\ln cd \ge (d-a)\ln ad \Leftrightarrow (ab)^{b-a} \cdot (bc)^{c-b} \cdot (cd)^{d-c} \ge (ad)^{d-a}.$$

10.15) Să se rezolve, în $\boldsymbol{R}^*$, **ecuația:** $n^{x^n}+n^{\frac{x+1}{x}}=n(n+1)$, **unde** $n \in \boldsymbol{N}, n \ge 3$, n **impar,** n **fixat.**

Petre Guțescu

❖Soluție

Ecuația se mai scrie: $n^{x^n}+n \cdot n^{\frac{1}{x}}=n(n+1)$.

Pentru $x<0: n^{x^n}+n \cdot n^{\frac{1}{x}}<n^0+n \cdot n^0=1+n<n(n+1)$. Deci $x<0$ nu este soluție.

Pentru $x>0$, folosind inegalitatea mediilor, avem: $n^{x^n}+n \cdot n^{\frac{1}{x}}=n^{x^n}+\underbrace{n^{\frac{1}{x}}+n^{\frac{1}{x}}+\ldots+n^{\frac{1}{x}}}_{n-ori} \ge (n+1)\sqrt[n+1]{n^{x^n} \cdot \underbrace{n^{\frac{1}{x}} \cdot n^{\frac{1}{x}} \cdot \ldots \cdot n^{\frac{1}{x}}}_{n-ori}}=$

$$=(n+1)\sqrt[n+1]{n^{x^n+\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x}}_{n-ori}}} \ge (n+1)\sqrt[n+1]{n^{(n+1)\sqrt[n+1]{x^n \cdot \frac{1}{x^n}}}}=n(n+1).$$

Ecuația din enunț este caz de egalitate în șirul anterior de inegalități care au loc dacă și numai dacă

$x^n=\frac{1}{x}$, adică

$x^{n+1}=1$. Soluția este $x=1$.

10.16) Se consideră numerele reale a,b,c,d,e,f **astfel încât** $1<a<b<c$ **și** $1<d<e<f$. **Să se rezolve ecuația:**

$$(ae)^x+(af)^x+(bd)^x+(bf)^x+(cd)^x+(ce)^x=2\left[(ad)^x+(be)^x+(cf)^x\right].$$

Petre Guțescu

❖Soluție

Ecuația se mai scrie, adăugând în fiecare membru expresia $(ad)^x+(be)^x+(cf)^x$, astfel:

$$a^x\left(d^x+e^x+f^x\right)+b^x\left(d^x+e^x+f^x\right)+c^x\left(d^x+e^x+f^x\right)=3\left(a^xd^x+b^xe^x+c^xf^x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a^x+b^x+c^x\right)\left(d^x+e^x+f^x\right)=3\left(a^xd^x+b^xe^x+c^xf^x\right) \qquad (1).$$

Pentru $x \le 0$ obținem $\begin{cases} a^x \ge b^x \ge c^x \\ d^x \ge e^x \ge f^x \end{cases}$, iar pentru $x \ge 0$ obținem $\begin{cases} a^x \le b^x \le c^x \\ d^x \le e^x \le f^x \end{cases}$.

Aplicând inegalitatea Cebîșev, obținem:

$$\left(a^x+b^x+c^x\right)\left(d^x+e^x+f^x\right) \le 3\left(a^xd^x+b^xe^x+c^xf^x\right) \qquad (2).$$

Ecuația (1) reprezintă caz de egalitate în inegalitatea (2), ceea ce este echivalent cu $\begin{cases} a^x = b^x = c^x \\ d^x = e^x = f^x \end{cases}$, adică $x = 0$ soluție unică.

10.17) Determinaţi cel mai mic număr natural a pentru care $C_{2n}^{n} < a^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

❖**Soluție**

$C_{2n}^{n} < C_{2n}^{0} + C_{2n}^{1} + ... + C_{2n}^{n} + ... + C_{2n}^{n} = (1+1)^{2n} = 4^n$ şi pentru $n = 5$ avem $C_{10}^{5} = 252 > 3^5 \Rightarrow a = 4$.

10.18) Fie $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}, m \le n, \sigma_m = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^m$. Arătaţi că :
$\sigma_0 \cdot C_n^0 + \sigma_1 \cdot C_n^1 + ... + \sigma_n \cdot C_n^n = 2^{2n-1} + C_{2n-1}^{n-1}$.

❖**Soluție**

Pentru orice n natural $0 \le m \le n$ avem $\sigma_m = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^m = C_n^{n-m} + ... + C_n^n = \left(C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n\right) - \left(C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-m-1}\right)$ sau $\sigma_m = 2^n - \left(\sigma_{n-m} - C_n^{n-m}\right) = 2^n - \sigma_{n-m} + C_n^m \Rightarrow \sigma_n + \sigma_m = 2^n + C_n^m$ (1). Deoarece $S_n = \sigma_0 \cdot C_n^n + \sigma_1 \cdot C_n^{n-1} + ... + \sigma_n \cdot C_n^0$ ajungem la $2S_n = (\sigma_0 + \sigma_n) \cdot C_n^0 + (\sigma_1 + \sigma_{n-1}) \cdot C_n^1 + ... + (\sigma_n + \sigma_n) \cdot C_n^n = \left(2^n + C_n^0\right) C_n^0 + \left(2^n + C_n^1\right) C_n^1 + ... + \left(2^n + C_n^n\right) C_n^n = 2^n \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k + \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = 2^{2n} + C_{2n}^n$. Concluzia e imediată.

10.19) Fie $A_1A_2A_3A_4$ patrulater inscriptibil , $\{O\} = A_1A_3 \cap A_2A_4$, $A_iA_{i+1} = a_i$, $A[A_iA_{i+1}O] = S_i$, R_i raza cercului circumscris triunghiului $A_iA_{i+1}O$, $i \in \{1,2,3,4\}$, $A_5 = A_1$.
Să se arate că :

1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{S_i \cdot R_i}{a_i} = \frac{a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_4}{2}$;

2) $\displaystyle\frac{256 \cdot \sqrt{\prod_{i=1}^{4} S_i \cdot R_i}}{(a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_4)^2} \le \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4} \le 2 \cdot \sum_{i=1}^{4} \frac{S_i \cdot R_i}{a_i}$.

Petre Guțescu

❖**Soluție**

1) Notam : $OA_1 = e$, $OA_2 = f$, $OA_3 = g$, $OA_4 = h$.
Folosind teorema 1 a lui Ptolemeu , putem scrie :

$$A_1A_3 \cdot A_2A_4 = A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_1A_4 \text{ sau :}$$
$$(e+g)\cdot(f+h) = a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_4 \iff$$
$$\iff ef + eh + gf + gh = a_1a_3 + a_2a_4 \ . \qquad (1)$$
$$\text{Dar : } R_1 = \frac{a_1ef}{4S_1} \iff \frac{S_1R_1}{a_1} = \frac{ef}{4} \ ; \qquad (2)$$
$$R_2 = \frac{a_2fg}{4S_2} \iff \frac{S_2R_2}{a_2} = \frac{fg}{4} \ ; \qquad (3)$$
$$R_3 = \frac{a_3gh}{4S_3} \iff \frac{S_3R_3}{a_3} = \frac{gh}{4} \ ; \qquad (4)$$
$$R_4 = \frac{a_4eh}{4S_4} \iff \frac{S_4R_4}{a_4} = \frac{eh}{4} \ . \qquad (5)$$

Adunând membru cu membru relațiile (2), (3), (4), (5) și tinând seama de (1) se obține relația cerută.

2) Din inegalitatea mediilor obținem: $\sqrt{a_1a_2a_3a_4} \le \dfrac{a_1a_3 + a_2a_4}{2} = 2\sum_{i=1}^{4}\dfrac{S_iR_i}{a_i}$. (6)

Tot din inegalitatea mediilor obținem:

$$\sqrt[4]{\prod_{i=1}^{4}\frac{S_iR_i}{a_i}} \le \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\frac{S_iR_i}{a_i} = \frac{a_1a_3 + a_2a_4}{16} \Rightarrow \frac{256\sqrt{\prod_{i=1}^{4}S_iR_i}}{(a_1a_3 + a_2a_4)^2} \le \sqrt{a_1a_2a_3a_4} \ . \qquad (7)$$

Din (6) și (7) se obține inegalitatea cerută.

CLASA a XI – a

11.12) Fie $n \in N^*$ **și fie** $A \in M_n(Z)$ **cu** $A^8 = O_n$. **Arătați că:**

a) $A + I_n$ **este inversabilă;**

b) det$\left(A^2 + I_n\right) =$ **det**$\left(A^4 + I_n\right) = 1$.

❖**Soluție**

a) $I_n = I_n - A^8 = (I_n + A)\cdot B \Rightarrow I_n + A$ este inversabilă.

b) $I_n = (I_n - A)(I_n + A)\left(I_n + A^2\right)\left(I_n + A^4\right) \Rightarrow 1 = \det(I_n - A)\cdot\det(I_n + A)\cdot\det\left(I_n + A^2\right)\cdot\det\left(I_n + A^4\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det\left(I_n + A^2\right) = \det\left(I_n + A^4\right) = 1.$

11.13) Să se arate că nu există matrice $A, B \in M_n(\boldsymbol{C}), n \ge 1, A, B \ne O_n$ **astfel încât** $rang(A\cdot B) = rang(A) + rang(B)$.

❖**Soluție**

Din teorema lui Sylvester, $rang(A\cdot B) \le rang(A) + rang(B) - n, \ \forall A, B \in M_n(\boldsymbol{C}), n \ge 1, A, B \ne O_n$.

Dar cum $rang(A\cdot B) = rang(A) + rang(B)$ ar rezulta $-n \ge 0$, fals.

11.14) Fie A o matrice pătratică de ordin impar (cel puțin egal cu 3) cu elementele numere întregi impare. Să se arate că dacă A este inversabilă atunci nu este posibil ca toți minorii elementelor unei linii să aibă modulele egale.

❖Soluție

Considerăm matricea $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,2n+1}}, n\in \boldsymbol{N}^*$ unde a_{ij} este impar și notăm d_{ij} minorul elementului a_{ij} în matricea A.
Vom presupune că toți minorii elementelor liniei întâi au modulele egale cu *d*. Deoarece matricea *A* este inversabilă, dacă dezvoltăm după elementele liniei întâi determinantul matricei *A* rezultă că $d\neq 0$.
Conform relației
$a_{21}\cdot\delta_{11}+a_{22}\cdot\delta_{12}+...+a_{2,2n+1}\cdot\delta_{1,2n+1}=0$ obținem că:
$a_{21}\cdot(-1)^{1+1}\cdot d_{11}+a_{22}\cdot(-1)^{1+2}\cdot d_{12}+...+a_{2,2n+1}\cdot(-1)^{1+(2n+1)}\cdot d_{1,2n+1}=0.$
Deoarece $d_{1j}=\varepsilon_{1j}\cdot d,\ \varepsilon_{1j}\in\{\pm 1\},\ \forall j=\overline{1,2n+1},$ după simplificarea cu *d* se obține:
$a_{21}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\varepsilon_{11}+a_{22}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\varepsilon_{12}+...+a_{2,2n+1}\cdot(-1)^{1+(2n+1)}\cdot\varepsilon_{1,2n+1}=0,$
egalitate care este imposibilă deoarece în stânga avem o sumă de $2n+1$ numere impare, deci un număr impar, iar în dreapta zero care nu este impar.

11.15) Se consideră $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. Să se arate că:

a) Dacă $A+B=AB$, atunci $rangA=rangB$;

b) Dacă $rangA=n-1$, atunci există $C\in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $C\neq O_n$ și $(A+C)^p=A^p+C^p, \forall p\in\mathbb{N}^*$.

❖Soluție

a) Din $AB=A+B$ deducem $AB-A-B+I=I$ sau $(A-I)(B-I)=I$, aşadar matricele $A-I, B-I$ sunt inversabile şi $rang(A-I)=rang(B-I)=n$. Egalitatea $AB=A+B$ se poate scrie şi $B=A(B-I)$; cum $rang(XY)\leq\min\{rangX, rangY\}$, deducem că $rangB\leq\min\{rangA,n\}=rangA.$ Analog $rangB\leq rangA$, aşadar $rangB=rangA.$
b) Luăm $C=A^*$ şi, deoarece $rangA=n-1$, deducem $C\neq O_n$, apoi $A\cdot A^*=A^*\cdot A=O$. În continuare avem $A^p\cdot\left(A^*\right)^q=O, \forall p,q\in\mathbb{N}^*$, deci $\left(A+A^*\right)^p=A^p+\left(A^*\right)^p, \forall p\in\mathbb{N}^*.$

11.16) Fie a,b numere reale cu $a<b$ și $f:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ funcție continuă astfel încât $\left(f(a)+f\left(a^k\right)\right)\left(f(b)+f\left(b^k\right)\right)<0,$ unde $k\in\boldsymbol{N}^*$, fixat. Să se arate că există $c\in(a,b)$ astfel încât $0<f(c)+f\left(c^k\right)\leq\frac{(b-a)^2}{4}.$

Petre Guțescu

❖Soluție

Considerăm funcția $g:[a,b]\to\boldsymbol{R},\ g(x)=f(x)+f\left(x^k\right)+(x-a)(x-b)$ care este continuă.
$g(a)\cdot g(b)=\left(f(a)+f\left(a^k\right)\right)\left(f(b)+f\left(b^k\right)\right)<0.$ Cum g este continuă:
$\exists c\in(a,b), g(c)=0\Rightarrow\exists c\in(a,b), f(c)+f\left(c^k\right)=(c-a)(b-c).$

Dar $0<(c-a)(b-c)\le\left(\dfrac{(c-a)+(b-c)}{2}\right)^2=\dfrac{(b-a)^2}{4}$, de unde concluzia.

11.17) Se consideră funcția continuă $f:[a,b]\to \boldsymbol{R},\ a,b\in \boldsymbol{R}, a<b.$ Să se arate că există $x_0\in(a,b)$ astfel încât

$$|f(x_0)|\ge\frac{2|2x_0-a-b|}{(a-b)^2}.$$

Petre Guțescu

❖**Soluție**

Considerăm funcția $g:[a,b]\to\boldsymbol{R},\ g(x)=(x-a)(x-b)f(x)+x-\dfrac{a+b}{2}$. Cum f este continuă pe $[a,b]$, deducem că g este continuă pe $[a,b]$. Deoarece $g(a)=\dfrac{a-b}{2}<0,\ g(b)>\dfrac{b-a}{2}>0$, rezultă că există $x_0\in(a,b)$ astfel încât $g(x_0)=0.$ Acum:

$$g(x_0)=0\Leftrightarrow(x_0-a)(x_0-b)f(x_0)+x_0-\frac{a+b}{2}=0\Leftrightarrow x_0-\frac{a+b}{2}=\left[-x_0^2+(a+b)x_0-ab\right]f(x_0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|x_0-\frac{a+b}{2}\right|=\left|-x_0^2+(a+b)x_0-ab\right||f(x_0)| \qquad (1).$$

Fie funcția $h:[a,b]\to\boldsymbol{R},\ h(x)=-x^2+(a+b)x-ab.$ Avem: $h(a)=h(b)=0,$ iar valoarea maximă este $\dfrac{(a-b)^2}{4}$ obținută pentru $x=\dfrac{a+b}{2}\in(a,b).$ Prin urmare $0\le -x_0^2+(a+b)x_0-ab\le\dfrac{(a-b)^2}{4}$ $\qquad (2).$

Din (1) și (2) obținem: $\dfrac{|2x_0-a-b|}{2}\le\dfrac{(a-b)^2}{4}\cdot f(x_0)$, de unde, prin înmulțirea relației cu $\dfrac{4}{(a-b)^2}$, se obține relația cerută.

11.18). Să se arate că nu există funcţii derivabile $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ care îndeplinesc simultan condiţiile:

1) $f'(0)\ne 0;$

2) $f^2(x^4)+f^2(y^4)+f^2(z^4)+f^2(t^4)+f(xyzt)+f(x)f(y)f(z)f(t)=f(x+y+z+t),\ \forall x,y,z,t\in\boldsymbol{R}.$

Petre Guţescu

❖**Soluție**

Presupunem, prin absurd, că există funcţii cu proprietăţile enunţate.

În 2) facem $x=y=z=t=0$ şi obţinem $4f^2(0)+f^4(0)=0,$ de unde $f(0)=0.$ $\qquad (*)$

În 2) facem $y=z=t=x$ şi obţinem $4f^2(x^4)+f(x^4)+f^4(x)=f(4x),\ \forall x\in\boldsymbol{R}$, de unde, prin derivare, obţinem: $32x^3f(x^4)f'(x^4)+4x^3f'(x^4)+4f^3(x)f'(x)=4f'(4x),\ \forall x\in\boldsymbol{R}$.

Înlocuind, în ultima relaţie, $x=0$ şi ţinând seama de $(*)$ obţinem $f'(0)=0,$ contradicţie cu 1).

Deci presupunerea este falsă.

11.19) Să se arate că dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie de patru ori derivabilă, cu $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ şi $f^{(4)}(x)\leq 0$, atunci există $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=ax^2+bx+c$.

❖**Soluție**

$f^{(3)}$ este, conform ipotezei, descrescătoare, deci există limitele $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}$. Folosind regula lui L. Hospital, avem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{6}\cdot f^{(3)}(x)\geq\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{6}\cdot f^{(3)}(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}$. Deoarece $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$, avem acum $0\geq\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^3}\geq\ \geq\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}\geq 0\Rightarrow f^{(3)}=0\Rightarrow f^{(2)}=const.$

Probleme propuse și selectate de prof. **Petre Guțescu**

CLASA a XII-a

12.11) Fie $(A,+,\cdot)$ un inel integru cu proprietăţile :

a) $x\in A$ cu $6x=0\Rightarrow x=0$; **b)** $x,y\in A$ cu $x^3=y^3\Rightarrow x=y$.

Să se demonstreze că dacă $a,b,c\in A$ satisfac egalitatea $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$,atunci $a=b=c$.

❖**Soluție**

Alegem $x=a-b, y=b-c$ şi ajungem la $x^2+yx+y^2=0$,de unde $x^3=y^3\Rightarrow x=y$,aşadar $3x^2=0$;din $6x^2=0$ deducem $x^2=0$,adică $x\cdot x=0$.Cum inelul este integru,avem $x=0, y=0$ şi deci $a=b, b=c$.

12.12) Fie $(A,+,\cdot)$ inel și $a,b\in A$ cu proprietatea că există $m,n,k\in N^*$ astfel încât $\left(a^k\cdot b^m\cdot a^k\right)^n=0$. Să se arate că elementele $1+a^{2k}b^m$ și $1+b^m a^{2k}$ sunt inversabile și să se calculeze inversele lor.

❖**Soluție**

Lema 1.
Dacă $x^p=0$, atunci $1-x$ este inversabil.
Demonstrație.
$(1-x)\left(1+x+x^2+...+x^{p-1}\right)=1.$
Lema 2.
Dacă x este nilpotent ($\exists k\in Z$ astfel încât $x^k=0$), atunci $-x$ este nilpotent și cum $1-x$ este inversabil rezultă $1+x$ inversabil.
Deoarece $x=a^k b^m a^k$ este nilpotent $\left(x^n=0\right)$ să arătăm că $y=a^{2n}b^m$ este nilpotent (există $p\in N^*$ astfel încât $y^p=0.$)

Avem $x^n=a^k b^m a^{2n} b^m a^{2k}...a^{2n} b^m a^n$ și $y^p=a^{2k}b^m a^{2k}b^m...a^{2k}b^m=a^k\cdot\left(a^k b^m a^{2n} b^m a^{2n}...a^{2k} b^m a^k\right)\cdot a^k b^m$.

Atunci pentru $p=n+1\Rightarrow y^{n+1}=a^n\cdot\left(a^n b^m a^{2n} b^m a^k...a^{2k} b^m a^k\right)\cdot a^k b^m=a^k\left(a^k b^m a^n\right)a^n a^m=a^k x^n a^k b^m=0,$ deci $1-y$ este inversabil și la fel este și $1+y=1+a^{2n}b^m$. Analog pentru $z=b^m a^{2n}$.

12.13) Fie *K* un corp finit şi $a,b\in K^*$ .Să se arate că ab este pătrat perfect în *K* dacă şi numai dacă *a* şi *b* sunt pătrate perfecte în *K* sau *a* şi *b* nu sunt pătrate perfecte în *K.*

❖Soluție

Dacă *a* şi *b* sunt pătrate perfecte în *K*,atunci există $x,y\in K$ astfel încât $a=x^2,b=y^2\Rightarrow ab=(xy)^2$.Dacă *a* şi *b* nu sunt pătrate perfecte în *K,* se ştie că grupul $(K^*,\cdot)$ este ciclic,deci există $x\in K$ care generează K.Avem deci $a=x^m,b=x^n\Rightarrow ab=x^m x^n=\left(x^{\frac{m+n}{2}}\right)^2$.

12.14) Fie $f:[-1,1]\to \boldsymbol{R}$ o funcție integrabilă cu proprietatea că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=1$.

a) Dați exemplu de astfel de funcție care nu admite primitive.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x} f(t)\,dt}{x-\sin x\cdot\cos x}$.

❖Soluție

a) Fie $0<a<1$ și $f(x)=\begin{cases}\sin^2 x, & |x|\le a\\ e^x, & a<|x|\le 1\end{cases}$.

Atunci f este integrabilă, evident $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=1$ și f nu admite primitive, nu are proprietatea lui Darboux
(are discontinuități de spețа I în $x=\pm a$).

b) Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^3}=\frac{2}{3}$ rezultă

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x} f(t)\,dt}{x-\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x} f(t)\,dt}{x^3}\cdot\frac{x^3}{x-\sin x\cos x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x} f(t)\,dt}{x^3}\ (1).$$

Condiția din enunț, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{t^2}=1,$ se scrie: $\forall\varepsilon>0,\exists\partial>0$ astfel încât $\forall t,|t|<\partial$ avem $\left|\frac{f(t)}{t^2}-1\right|<\varepsilon\Leftrightarrow t^2-\varepsilon t^2\le f(t)\le t^2+t^2\varepsilon.$ Integrând de la $-x$ la x cu $x<\partial$ $\Rightarrow\frac{2}{3}-\frac{2\varepsilon}{3}\le\frac{\int_{-x}^{x} f(t)\,dt}{x^3}\le\frac{2}{3}+\frac{2\varepsilon}{3},$

de unde $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x} f(t)\,dt}{x^3}=\frac{3}{2}$ $(2)\overset{(1),(2)}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x} f(t)\,dt}{x-\sin x\cos x}=1.$

12.15) Dacă $k>0$ și $f:[-1,1]\to \boldsymbol{R}_+$, impară, derivabilă cu derivata continuă, atunci

$$\int_{-k}^{k}\frac{\sqrt{f'(x)}}{a^{f(x)}+1}dx\le\sqrt{kf(k)}.$$

❖Soluție

Avem: $\int_{-k}^{k}\frac{\sqrt{f'(x)}}{a^{f(x)}+1}dx=\int_{-k}^{0}\frac{\sqrt{f'(x)}}{a^{f(x)}+1}dx+\int_{0}^{k}\frac{\sqrt{f'(x)}}{a^{f(x)}+1}dx=\int_{0}^{k}\frac{\sqrt{f'(x)}}{a^{-f(x)}+1}dx+\int_{0}^{k}\frac{\sqrt{f'(x)}}{a^{f(x)}+1}dx=\int_{0}^{k}\sqrt{f'(x)}dx\le$

$\le\sqrt{\int_0^k dx\cdot\int_0^k f'(x)dx}=\sqrt{kf(k)}$ deci $\int_{-k}^{k}\frac{\sqrt{f'(x)}}{a^{f(x)}+1}dx\le\sqrt{kf'(k)}$ (s-a folosit inegalitatea Cauchy-Buniakowski-

-Schwarz: $\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$ și f impară $\Rightarrow f'$ pară și $f(0)=0$).

12.16) Fie funcțiile $f,g:[a,b]\to \boldsymbol{R}$, *f* continuă pe $[a,b]$, *g* derivabilă pe $[a,b]$ cu $g'(x)\neq 0$ pentru orice $x\in(a,b)$.

Să se arate că există $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=\frac{[g(a)+g(b)-2g(c)]g'(c)}{k[g(c)-g(a)][g(c)-g(b)]}$, $k\in N^*$, k fixat.

Petre Guţescu

❖Soluție

Cum f este continuă, atunci funcţia $F:[a,b]\to\boldsymbol{R},\ F(x)=\int_a^x f(t)dt$ este primitivă a lui f pe $[a,b]$.

Considerăm funcţia $h:[a,b]\to\boldsymbol{R},\ h(x)=[g(x)-g(a)][g(x)-g(b)]e^{kF(x)}$ care este funcţie Rolle pe $[a,b]$.

Cum $h(a)=h(b)=0,$ aplicând teorema Rolle, există $c\in(a,b)$ astfel încât $h'(c)=0.$ (1)

$h'(x)=g'(x)[g(x)-g(b)]\cdot e^{kF(x)}+g'(x)[g(x)-g(a)]\cdot e^{kF(x)}+[g(x)-g(a)][g(x)-g(b)]\cdot k\cdot f(x)\cdot e^{kF(x)},$

$\forall x\in(a,b).$ (2)

Din (1) şi (2) se obţine relaţia din enunţ.

Presupunem că $g(c)=g(a)$ sau $g(c)=g(b)$. Atunci, aplicând teorema Rolle, ar exista $c_1\in(a,c)$ sau $c_2\in(c,b)$ astfel ca $g'(c_1)=0$, respectiv $g'(c_2)=0,$ contradicție cu $g'(x)\neq0,\forall x\in(a,b).$

12.17) Fie a,b numere reale și $f:[a,b]\to[0,\infty)$ funcție continuă astfel încât $\int_a^b f(x)dx=1$ și $k\in \boldsymbol{N}^*$. Să se arate că există $c_1,c_2,...,c_k\in(a,b)$, distincte două câte două, cu proprietatea:

$$\frac{ke^a}{b-a}\le\sum_{i=1}^{k}e^{c_i}\cdot f(c_i)\le\frac{ke^b}{b-a}.$$

Petre Guțescu

❖Soluție

$a\le x\le b\Rightarrow e^a\le e^x\le e^b,\forall x\in[a,b]\Rightarrow e^a f(x)\le e^x f(x)\le e^b f(x),\ \forall x\in[a,b]\Rightarrow$

$$\Rightarrow e^a\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b e^x f(x)dx \le e^b\int_a^b f(x)dx \Rightarrow e^a \le \int_a^{a+\frac{b-a}{k}} e^x f(x)dx + \int_{a+\frac{b-a}{k}}^{a+2\cdot\frac{b-a}{k}} e^x f(x)dx + \ldots + \int_{a+(k-1)\cdot\frac{b-a}{k}}^{b} e^x f(x)dx \le e^b.$$

Aplicând prima *Teoremă de medie* pentru fiecare integrală, obținem:

există $c_1 \in \left(a, a+\frac{b-a}{k}\right), c_2 \in \left(a+\frac{b-a}{k}, a+2\cdot\frac{b-a}{k}\right), \ldots, c_k \in \left(a+(k-1)\cdot\frac{b-a}{k}, b\right)$ astfel încât

$e^a \le \frac{b-a}{k}e^{c_1}f(c_1) + \frac{b-a}{k}e^{c_2}f(c_2) + \ldots + \frac{b-a}{k}e^{c_k}f(c_k) \le e^b,$ de unde concluzia.

12.18) Fie $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ funcţie continuă. Să se arate că există $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=\frac{c^{k-1}\left(a^k+b^k-2c^k\right)}{\left(a^k-c^k\right)\left(b^k-c^k\right)},\ k\in \mathbf{N}^*, k$ fixat.

Petre Guţescu

❖**Soluție**

Cum f este continuă, atunci funcţia $F:[a,b]\to\mathbf{R}, F(x)=\int_a^x f(t)dt$ este primitivă a lui f pe $[a,b]$.

Considerăm funcţia $g:[a,b]\to\mathbf{R}, g(x)=\left(x^k-a^k\right)\left(x^k-b^k\right)e^{kF(x)}$ care este funcţie Rolle pe $[a,b]$.

Cum $g(a)=g(b)=0,$ aplicând teorema Rolle, există $c\in(a,b)$ astfel încât $g'(c)=0.$ (1)

$g'(x)=k\cdot x^{k-1}\cdot\left(x^k-b^k\right)\cdot e^{kF(x)}+k\cdot x^{k-1}\cdot\left(x^k-a^k\right)\cdot e^{kF(x)}+\left(x^k-a^k\right)\cdot\left(x^k-b^k\right)\cdot k\cdot f(x)\cdot e^{kF(x)}, \forall x\in(a,b).$ (2)

Din (1) şi (2) se obţine relaţia din enunţ.

Probleme propuse și selectate de prof. **Petre Guțescu**