CLASA a V a

5.23) Un palindrom este un număr natural care este același atunci când este citit înainte sau înapoi. Numerele 101 și 4554 sunt exemple de palindroame. Să se afle raportul dintre numărul de palindroame cu 5 cifre la numărul de palindroame de 4 cifre

Muscalu Adrian

5.24) Se consideră mulțimea numerelor naturale care au proprietatea că suma cifrelor sale este 2018.
Stabiliți dacă printre elementele acestei mulțimi, există pătrate perfecte.

Valentina și Liviu Radu, Tulcea.

5.25) Numerele naturale între 1 și 2015 sunt scrise pe tabla. Două numere alese aleatoriu sunt șterse și înlocuite de diferența lor dând o secvență cu un număr mai puțin. Acest proces se repetă până când nu există decât un număr rămas. Numărul rămas este par sau impar?

Muscalu Adrian

5.26) Aflați valoarea minimă a numărului natural n$\geq$2, pentru care numărul N= $2016^n-2015n-1$ dă un rezultat întreg la împărțirea cu 2015$\cdot$2016.

Valentina și Liviu Radu, Tulcea

5.27) Să se deducă regula de formare a șirului de numere 3,6,9,15,24,39 și să se afle suma primilor 10 termeni

Muscalu Adrian

5.28) Problema 4. Ion și Vasile au jucat un joc. Ion a scris pei tabla numerele naturale de la 1 la 18 și ia oferit lui Vasile posibilitatea de a alege 8 numere din această listă. Pentru a câștiga jocul Vasile trebuiet să aleagă 8 numere astfel ca diferența dintre oricare două este mai mică sau egală cu 7 sau mai mare ca 11. Poate Vasile să câștige jocul?

Muscalu Adrian

5.29) Sunt zece saci mari cu monede. Nouă dintre acestea conțin monede de preț cântărind 10g fiecare, iar una conține monede contrafăcute care cântăresc 9g fiecare. Printr-o singură găsiți sacul cu monede contrafăcute

Muscalu Adrian

5.30) Căte pătrate perfecte sunt în mulţimea $\{1^1, 2^2, 3^3, \ldots, 100^{100}\}$.

Muscalu Adrian

5.31) Pentru un număr întreg pozitiv n, definim P (n) ca fiind suma cifrelor lui n plus numărul de cifre ale lui n. De exemplu, P (45) = 4 + 5 + 2 = 11. (Rețineți că prima cifră a lui n, citirea de la stânga la dreapta, nu poate fi 0).
(a) Determinați P (2017).
(b) Determinați toate numerele n astfel încât P (n) = 4.
(c) Există un număr n pentru care P (n) -P (n + 1)> 50.

Muscalu Adrian

5.32) Numărul N este produsul tuturor numerelor naturale de la 1 la 99 care nu se termină în cifra 5. Aceasta înseamnă N = 1 × 3 × 7 × 9 × 11 × 13 × 17 × 19 × .... × 91 × 93 × 97 × 99. Care este ultima cifră a lui N?

Muscalu Adrian

CLASA a VI a

6.24) Mama i-a pus pe Ana şi pe George să facă curăţenie în camera lor, până la ora 16,00 când se întoarce de la servici. Dacă Ana ar face curăţenie de una singură ar dura 60 de minute, dacă Geoge ar face curăţenie singur ar dura 90 de minute. Copiii luându-se cu joaca nu au observat că timpul a trecut; văzând că este ora 15 şi 20 minute, s-au apucat de curăţenie împreună. Au reuşit să termine până la venirea mamei ?

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

6.25)a) Fie punctele A, B, C coliniare astefel încât $|AB| = 3|BC|$. Dacă lungimea segmentului $|MN|$ este egală cu 40 cm, unde M şi N sunt mijloacele segmentelor |AB|și respectiv|BC| . Să se calculeze lungimea segmentelor $|AB|, |AC|$ $și$ $|BC|$.
b) Fie segmentul $|AB|$ şi punctele M şi N cu proprietatea M aparţine segmentului $|AB|$ şi N aparţine dreptei AB, astfel încât B să aparţină segmentului $|AN|$. Fie P mijlocul segmentului $|AM|$ astfel încât PB= 60 cm şi $|BM|$=2$|BN|$. Dacă Q este mijlocul segmentului $|AP|$, calculaţi lungimea segmentului $|NQ|$.

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

6.26) Să se determine numerele naturale n, n≠0, astfel încât numărul N= (2017^n – 4)(2017^n – 3)(2017^n – 2) să fie divizibil cu 30.

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

6.27) Determinaţi toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$, ştiind că numerele $\overline{abc}, \overline{bca}$ și $\overline{cab}$ sunt direct poporţionale cu numerele 52, 76 şi respectiv 94.

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

6.28) Fie ABC un triunghi oarecare, punctul D∈ AC și punctul E ∈ (AB), astfel încât $\widehat{DBC} \equiv \widehat{ECB}$. Se notează cu F intersecția dintre BD și CE. Dacă FA este bisectoarea unghiului $\widehat{EFD}$, atunci:

a) Triunghiul ABC este isoscel ?

b) Dreptele AF și BC sunt perpendiculare ?

c)

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

6.29) Considerăm mulţimea cifrelor {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}. O grupă de cercetaşi vor să-şi dezvolte propriul cod. Menționăm că, “cuvintele” pot avea lungime de la unu la zece (adică pot fi formate din unu până la zece cifre) și că 0 nu poate avea prima poziție în “cuvânt” (pentru a semăna cu numerele).

Câte “cuvinte” se pot forma cu aceste cifre ?

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

6.30) Andrei, Victor şi Mihai fac parte din echipa de atletism a școli și se antrenează împreună pentru concursurile interșcolare. Ei pleacă în acelaşi timp, din acelaşi loc, alergând pe aceeaşi direcţie. Andrei aleargă câte 8 minute şi se odihneşte 4 minute, Victor aleargă câte 10 minute şi se odihneşte 5 minute, iar Mihai aleargă câte 6 minute şi se odihneşte 3 minute. După câte minute pornesc în alergare în acelaşi timp din nou ?

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

6.31) Găsiţi cel mai mic şi cel mai mare număr format din 2017 cifre, cu proprietatea că cifrele învecinate, din care este format numărul, au parităţi diferite şi numărul este divizibil cu 18.

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

6.32)

a) Să se determine numerele naturale x și y, unde x este număr prim, cu proprietatea că: $35x + y^2 + 11y = 210$.

b) Să se determine numerele naturale a și b, cu proprietatea că: $a^3 + a^6 + b^6 = 133617$.

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

6.33) Fie triunghiul oarecare ABC, cu proprietatea că < BAC este obtuz. Fie perpendiculara în A pe AC intersectează pe BC în D, iar perpendiculara în A pe AB intersectează pe BC în E. Notăm cu F intersecția dintre înățimea din E a triunghiului AEC și înălțimea din D a triunghiului ADB.

Demonstrați că:

a) AF și BC sunt perpendiculare;

b) D este ortocentru în triunghiul ABF;

c) AE este perpendiculară pe FC.

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

CLASA a VII a

7.23) Rezolvaţi în Q ecuaţia:$\frac{x-10}{2010}+\frac{x-17}{2003}=\frac{x-2010}{10}+\frac{x-2003}{17}$.

7.24) Determinaţi numerele x$\in Z-\{1\}$ pentru care $\sqrt{\frac{x+34}{x-1}}$ este număr întreg.

7.25) Aflaţi numărul natural nenul n, astfel încât $\frac{1}{3*5}+\frac{2}{5*9}+\frac{4}{9*17}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{2^{2016}-1}{3(2^{2017}+1)}$.

7.26) Fie numărul x=$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5^2}+\sqrt{5^3}+\cdots+\sqrt{5^{200}}}{6\sqrt{5}+30}$.Arătaţi că x este număr natural.

7.27) Detreminaţi mulţimea A=$\left\{a\in Z \,\middle|\, \frac{\sqrt{12+6\sqrt{3}}+\sqrt{19+8\sqrt{3}}-\sqrt{16-8\sqrt{3}}}{2a+1}\in Z\right\}$.

7.28) Rezolvaţi în N ecuaţia:$[\sqrt{1*5}]+[\sqrt{2*6}]+\ldots+\left[\sqrt{n(n+4)}\right]=230$,unde $[x]$reprezintă partea întreagă a numărului real x.

7.29) Se consideră un paralelogram ABCD cu centrul O. Punctele M şi N sunt mijloacele segmentelor $[BO]$ şi $[CD]$. Dacă triunghirile ABC şi AMN sunt asemenea, demonstraţi că ABCD este pătrat.

7.30) În pătratul ABCD se consideră punctele M∈(BC) şi N∈AD. Fie $\{P\}$=AM∩ BD. Demonstraţi că dreptele CP şi BN sunt perpendicular dacă şi numai dacă dreptele MN şi AB sunt paralele.

7.31) Măsurile unghiurilor formate în jurul unui punct O sunt exprimate prin puteri ale numărului natural 5. Aflaţi numărul minim de unghiuri în condiţiile date şi indicaţi care sunt aceste n măsuri.

7.32) Fie paralelogramul ABCD şi punctele M,N mijloacele laturilor $[AB]$ şi respectiv $[BC]$. Dacă punctul P este intersecţia dreptelor AN şi DM, iar Q este mijlocul segmentului $[DP]$, demonstraţi că P este centrul de greutate al triunghiului ABQ.

Problemele 7.23-7.32 au fost selectate de Prof. Căpriță Doru-Marian

7.33) Aflați suma primelor 29 de zecimale ale numarului $N=(\sqrt{2016}-45)^{100}$.

Valentina și Liviu Radu, Tulcea.

CLASA a VIII a

8.23) Se consideră un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile *a*, *b* și *c*. Dacă $\frac{a+2b}{a-b}=\frac{3}{2}$ și $\frac{2b-c}{b+3c}=\frac{1}{2}$, demonstrați că paralelipipedul poate fi umplut cu un număr întreg de cuburi de aceeași dimensiune.

Prof. Marcelina Popa

8.24) Fie $x,y,z\in R$ cu proprietățile $x+y+z=2$ și $|x-1|+|y-1|+|z-1|=1$. Demonstrați că $x\le 1, y\le 1, z\le 1$.

Prof. Marcelina Popa

8.25) Se consideră expresia $E(x,y)=\frac{6x^2-xy-y^2}{3x+y}$, unde $x,y\in[1,3]$. Aflați valoarea maximă și valoarea minimă a lui $E(x,y)$.

Prof. Marcelina Popa

8.26) Determinați $x, y \in R$ cu proprietatea:

$$\sqrt{\frac{x+y}{3}}+\sqrt{\frac{3}{x+y}}+|x-2y|=2$$

Prof. Marcelina Popa

8.27) Să se rezolve în $(1,\infty)$ ecuația:

$$\frac{2x-1}{x(x-1)}+\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}=\frac{25}{12}$$

Prof. Marcelina Popa

8.28) Fie ABCD un tetraedru cu toate fețele triunghiuri ascuțitunghice. Dacă $\angle ABD \equiv \angle ABC$ și $\angle ACB \equiv \angle ACD$, demonstrați că $\angle ADC \equiv \angle ADB$.

Prof. Marcelina Popa

8.29) Dacă *a* și *b* sunt două numere naturale impare, arătați că media geometrică a numerelor *a* și *a+2b* este un număr irațional.

Prof. Marcelina Popa

8.30) Determinați numărul natural nenul *n* astfel încât:

$$[\sqrt{1\cdot 3}]+[\sqrt{3\cdot 5}]+\ldots[\sqrt{(2n-1)(2n+1)}]=5675$$

Prof. Marcelina Popa

8.31) Rezolvați în***N*** ecuația: $x^5-x^4-x^3-x^2+x+1=0$

Prof. Marcelina Popa

8.32) Fie *VABCD* o piramidă patrulateră regulată cu fețele laterale triunghiuri echilaterale. Fie *M* mijlocul lui *[VA]* și *x* măsura unghiului dintre dreapta *BM* și planul *(VBC)*. Arătați că $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Prof. Marcelina Popa