CLASA a IX – a

9.23) Să se arate că $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k^2+4k+2)\sqrt{k(k+1)(k+2)}} < \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$, pentru orice n număr natural nenul.

9.24) Pentru *x,y,z* numere reale pozitive astfel încât *xyz=1*, arătaţi că

$$x(y+1) + y(z+1) + z(x+1) \leq x^2 + y^2 + z^2 + 3$$

9.25) Să se afle prima zecimală a numărului real $x = \sqrt{n^2 + 15n + 56}$ pentru n, număr natural nenul.

9.26) Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, astfel încât $3(x+1) < f(x) + 1$ şi $3x \geq f(x) - 2$.

i) Determinaţi $f\left(\frac{2017}{2019}\right)$

ii) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = 2018$

9.27) Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Arătaţi că

$$3(GA^2 + GB^2 + GC^2) = CA^2 + AB^2 + BC^2$$

9.28) Să se determine funcţiile $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x) + f([x]) \cdot f(\{x\}) = x, \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}$$

9.29) Fie triunghiul ABC şi k$\epsilon(1,\infty) \setminus \{2\}$. Pe laturile AB respectiv AC se iau punctele D, M respectiv N, E astfel încât $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $k\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $(k-1)\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE}$ iar P este mijlocul segmentului DE. Să se demonstreze că punctele M, N, P sunt coliniare.

Probleme propuse și selectate de prof. dr. Liliana Anastasiu

9.30) Arătați că numărul $n = \underbrace{11...1}_{2017 ori}\underbrace{22...2}_{2018 ori}5$ este pătrat perfect.

Valentina și Liviu Radu, Tulcea

9.31) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$, există $n \in \boldsymbol{N}^*$ astfel încât:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{x+4^{k-1}}{4^k}\right] + \left[\frac{x+2\cdot 4^{k-1}}{4^k}\right] + \left[\frac{x+3\cdot 4^{k-1}}{4^k}\right]\right) = \begin{cases} [x], & x \geq 0 \\ [x]+1, & x < 0 \end{cases}.$$

***Petre Guțescu,* Tulcea**

CLASA a X – a

10.20) Plecand de la ecuatia $3^y+4^y=5^y$ propun urmatoarea ecuatie:
fie a,b,c,d,e numere reale nenule astfel incat a>b>c>d>e si a+b=c+d+e.
Rezolvati in R ecuatia: $a^y+b^y=c^y+d^y+e^y$.

Prof. Buga Viorel

10.21) Arătați că: $(1+\sin x)^{2016}+(1-\sin x)^{2016}\leq 2^{2016}$, pentru orice număr real x.

Valentina și Liviu Radu, Tulcea

10.22) Rezolvati in numere naturale: $5^x=1+2^y$

10.23) Rezolvati ecuatia: $[(x^3+3x^2+2x+1)/3]+x=23$

10.24) Rezolvati in R ecuatia: $x^4+x^2+\sqrt{2}\,x+2=0$

10.25) Fie functiile f,g:[0,n]→R cu proprietatiile:
f(n-k)=f(k) si g(n-k)=-g(k), unde k∈{0,1,2...n}.
Sa se arate ca $\sum_{k=0}^{n} f(k)g(k)=0$.

10.26) Fie a ∈R si f:R→R astfel incat:
1° f(f(x))=4x+3 oricare x∈R
2° f(f(f(x)))=8x+a oricare x∈R.
a) Sa se determine a∈R si functia de gr.I care verifica conditiile 1° si 2°.
b) Sa se arate ca singura functie f : R→R care verifica 1° si 2° este functia determinata la punctul a)

10.27) Fie f : R→R o functie care admite drept perioada orice numar irational.Sa se arate ca f este constanta.

10.28) Fie f : R→R o functie periodica si monotona.

Problemele 10.22-10.28 au fost selectate de prof. Buga Viorel

CLASA a XI – a

11.20) Pentru o permutare $\varphi \in S_n$ se notează $S_n(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{\varphi(k)}$.

Să se arate că $S_n(\varphi)$ este minimă dacă φ este permutarea identică și apoi să se calculeze $\lim_{n\to\infty} S_n(\varphi)$.

11.21) Fie A și B două matrice pătratice cu elemente reale.
Arătați că $Tr\left[\left(\alpha \cdot A^n + \beta \cdot B^n\right) \cdot \left(A \cdot B - B \cdot A\right)\right] = 0, \forall n \in \boldsymbol{N}^*, \forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$.

11.22) Fie $A, B \in M_n(\boldsymbol{R})$, astfel încât matricea *B* are toate elementele egale cu *x*. Să se arate că: $\det(A+B) \cdot \det(A-B) \le \left(\det(A)\right)^2$.

11.23) Să se arate că: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} k^e} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} k^\pi}$.

11.24) Considerăm șirul de numere reale

$(x_n)_{n\ge1}$, $x_n = a^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}} - a^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}, a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Petre Guțescu

11.25) Să se determine $a \in \boldsymbol{R}$ astfel încât șirul
$(x_n)_{n\ge2}, x_n = \sqrt[n+3]{(n+3)!} + \sqrt[n+2]{(n+2)!} + \sqrt[n+1]{(n+1)!} + a\sqrt[n]{n!}$ să
fie convergent și să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

11.26) Fie șirurile $(a_n)_{n\ge1}$ și $(b_n)_{n\ge1}$ de numere reale date astfel: $1 < a_1 < b_1, a_n = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$,
$b_n = \frac{b_{n-1}-1}{a_{n-1}-1}, \forall n \ge 2$. Determinați valorile lui a_1 și b_1 pentru care ambele șiruri sunt convergente.

11.27) Dacă $(x)_{n\ge1}$ este un șir de numere reale astfel încât există
$\lim_{n\to\infty}\left(x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n\right) = x \in \overline{\boldsymbol{R}}$, să se arate că există și să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^3}$.

***Probleme propuse și selectate de prof.* Petre Guțescu**

CLASA a XII – a

12.19) Fie A o submulțime a mulțimii numerelor complexe, având proprietățile:

1) $\forall z \in \boldsymbol{C}, |z| = 1 \Rightarrow z \in A.$

2) A este parte stabilă a lui $\boldsymbol{C}$ față de adunare.

Să se demonstreze că $A = \boldsymbol{C}$.

12.20) Fie $(G,\cdot)$ un grup și $x, y \in G.$ Dacă există $\alpha, \beta \in \boldsymbol{Z}, \alpha, \beta$ relativ prime, astfel ca $xy^{\alpha} = y^{\alpha}x$ și $xy^{\beta} = y^{\beta}x,$ atunci $xy = yx.$

12.21) Fie *G* un grup cu proprietatea următoare: *G* se poate scrie ca reuniunea a trei subgrupuri diferite de
G, dintre care două au câte două elemente. Să se arate că *G* este izomorf cu grupul lui Klein.

12.22) Se consideră funcțiile $f_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, n \in \boldsymbol{N}^*,$

$$f_n(x) = +\begin{cases} nx^{n-1} \cdot \sin\dfrac{1}{x} - x^{n-2} \cdot \cos\dfrac{1}{x}, & x \in (-\infty, 0) \\ 0, \ x = 0 \\ 2x \cdot \cos\dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{1}{x}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}.$$

Să se arate că f_1 nu admite primitive, iar f_n admite primitive pentru orice $n \geq 2.$

12.23) Fie $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ cu proprietatea că funcțiile
$g, h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, g(x) = (x+1) \cdot f(x), \ h(x) = x \cdot f(x+1)$
admit primitivepe $\boldsymbol{R}$. Să se arate că *f* admite primitive pe ***R***.

12.24) Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{3\sin x + x^2 - 2x}{e^x + 3(\sin x + \cos x) + 2x^2} dx,$ unde $x \in I \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

12.25) Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{\sin 2x + 3\sin x + 5\cos x + 5}{2 + \sin x + \cos x} dx, \ x \in \boldsymbol{R}.$

12.26) Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{x^{2017} - 1}{(x-1)(x^{2018} - 1)} dx,$ unde $x \in (1, \infty).$

Petre Guțescu

Probleme propuse și selectate de prof. **Petre Guțescu**