CLASA a V a

5.23) Un palindrom este un număr natural care este același atunci când este citit înainte sau înapoi. Numerele 101 și 4554 sunt exemple de palindroame. Să se afle raportul dintre numărul de palindroame cu 5 cifre la numărul de palindroame de 4 cifre

Muscalu Adrian

❖Soluție

Palindroamele de 4 cifre sunt de forma $\overline{abba}$, unde a∈{1,2,...,9} şi b∈{0,1,...,9} sunt în număr de 90. Cele de 5 cifre sunt de forma $\overline{abcba}$, unde a∈{1,2,...,9} şi b,c∈{0,1,...,9} sunt în număr de 900. Raportul dintre ele este 10.

5.24) Se consideră mulțimea numerelor naturale care au proprietatea că suma cifrelor sale este 2018.
Stabiliți dacă printre elementele acestei mulțimi, există pătrate perfecte.

Valentina și Liviu Radu, Tulcea.

❖Soluție

Pătratul unui numar natural este de forma 3k sau 3k+1, adică nu exista pătrate perfecte de forma 3k+2.
Dar 2018=2016+2=3·672+2, deci 2018 este de forma 3k+2.
In concluzie nici un număr natural cu suma cifrelor 2018 nu poate fi pătrat perfect.

5.25) Numerele naturale între 1 și 2015 sunt scrise pe tabla. Două numere alese aleatoriu sunt șterse și înlocuite de diferența lor dând o secvență cu un număr mai puțin. Acest proces se repetă până când nu există decât un număr rămas. Numărul rămas este par sau impar?

Muscalu Adrian

❖Soluție

Secvența de numere întregi de la 1 până la 2015 conține 1007 chiar numere și 1008 numere impare.
Luăm în considerare 3 cazuri:

1) Dacă ambele numere șterse sunt pare acestea sunt înlocuite cu un numar par. Deci, numărul de numere impare nu se schimbă.
2) Dacă un număr este par și altul este impar se înlocuiesc cu un număr impar. Deci, numărul de de numere impare se schimbă.
3) Dacă ambele numere șterse sunt impare, ele sunt înlocuite cu un numar par. Numărul de numere impare scade cu două.
Astfel, la fiecare pas, numărul de numere impare fie rămâne aceeași sau scade cu două. Deoarece inițial a fost în număr impar, numărul lor va rămâne impar. Prin urmare, atunci când există un singur număr rămas acest număr este par.

5.26) Aflați valoarea minimă a numărului natural $n \geq 2$, pentru care numărul N= $2016^n - 2015n - 1$ dă un rezultat întreg la împărțirea cu $2015 \cdot 2016$.

Valentina și Liviu Radu, Tulcea

❖Soluție

N:$(2015 \cdot 2016)= \frac{2016^n - 2015n - 1}{2015 \cdot 2016} = \frac{2016^n - 2015n - 2016 + 2015}{2015 \cdot 2016} =$

$\frac{2016(2016^{n-1} - 1) - 2015(n-1)}{2015 \cdot 2016} = \frac{2016(2016^{n-1} - 1)}{2015 \cdot 2016} - \frac{2015(n-1)}{2015 \cdot 2016} =$

$= \frac{(2016-1)(2016^{n-2} + 2016^{n-3} + \ldots 1)}{2015} - \frac{n-1}{2016} =$

$= 2016^{n-2} + 2016^{n-3} + \ldots + 1 - \frac{n-1}{2016} \in \mathbf{Z}. \Leftrightarrow \frac{n-1}{2016} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow n-1 \in M_{2016.}$, și $n \geq 2$, n minim.

Deci n-1=2016 $\Rightarrow$ n=2017.

5.27) Să se deducă regula de formare a șirului de numere 3,6,9,15,24,39 și să se afle suma primilor 10 termeni

Muscalu Adrian

❖Soluție

Se observă că fiecare termen este suma celor doi termeni precedenți. Suma primilor 10 termeni este
3+6+9+15+24+39+63+102+165+267=693
4) Sunt 100 persoane la un meci de fotbal între două școli. Dacă fiecare dă mâna cu fiecare, câte strângeri de mână s-au efectuat
99+98+...+1=4950

5.28) Problema 4. Ion și Vasile au jucat un joc. Ion a scris pei tabla numerele naturale de la 1 la 18 și ia oferit lui Vasile posibilitatea de a alege 8 numere din această listă. Pentru a câștiga jocul Vasile trebuiet să aleagă 8 numere astfel ca diferența dintre oricare două este mai mică sau egală cu 7 sau mai mare ca 11. Poate Vasile să câștige jocul?

Muscalu Adrian

❖Soluție

Să presupunem că astfel de numere întregi {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8} sunt selectate și listate în ordinea crescătoare. Cum toate cerințele sunt despre diferențele dintre numere întregi, noi poate să scădem același număr din toate cele 8 alese astfel ca x1 = 1. Deoarece diferența între oricare două numere întregi este mai mică de 7 sau mai mare de 11, numerele întregi 8,9,10,11,12 nu pot fi în listă. Fie următoarele perechi de numere întregi rămase: (2,13), (3,14), (4,15), (5,16), (6,17), (7,18). Diferența între două numere , formând aceeași pereche, este 11. Astfel, numai un singur număr din fiecare pereche poate fi reprezentat în listă. Deci aceste 6 perechi pot produce doar șase numere întregi în listă. Cu x1 = 1 sunt 7. Prin urmare, 8 numere naturale nu pot fi alese.

5.29) Sunt zece saci mari cu monede. Nouă dintre acestea conțin monede de preț cântărind 10g fiecare, iar una conține monede contrafăcute care cântăresc 9g fiecare. Printr-o singură găsiți sacul cu monede contrafăcute

Muscalu Adrian

❖Soluție

Luați o monedă din primul sac, două monede din cel de-al doilea sac, trei monede din cel de al treilea,. . ., 10 monede din sacul al zecela. Numărul total de monede luate din saci este 55. Cântărim cele 55 de monede. Dacă toate monedele ar fi bune, greutatea ar fi de 550g. Dacă ar exista k monede contrafăcute, greutatea este (550 - k) g. Prin urmare, scăzând din 550 rezultatul cântăririi se află numărul sacului cu monede contrafăcute.

5.30) Căte pătrate perfecte sunt în mulţimea $\{1^1, 2^2, 3^3, \ldots, 100^{100}\}$.

Muscalu Adrian

❖Soluție

Dacă exponentul este par numărul este pătrat perfect. Astfel 50 de numere sunt pătrate perfecte. Dacă exponentul este impar trebuie ca baya să fie pătrat perfect. Pătratele perfecte impare mai mici sau egale cu 100 sunt 1,9,25,49,81. În total sunt 55 de pătrate perfecte în mulţime

5.31) Pentru un număr întreg pozitiv n, definim P (n) ca fiind suma cifrelor lui n plus numărul de cifre ale lui n. De exemplu, P (45) = 4 + 5 + 2 = 11. (Rețineți că prima cifră a lui n, citirea de la stânga la dreapta, nu poate fi 0).
(a) Determinați P (2017).
(b) Determinați toate numerele n astfel încât P (n) = 4.
(c) Există un număr n pentru care P (n) -P (n + 1)> 50.

Muscalu Adrian

❖Soluție

a) P(2017)=2+0+1+7+4=14
b) $n\in\{3,11,20,100\}$
c) Fie n=999999. Atunci P(n)=9×6+6=63 si P(n+1)=P(1000000)=7. Se observă că P(n)-P(n+1)>50

5.32) Numărul N este produsul tuturor numerelor naturale de la 1 la 99 care nu se termină în cifra 5. Aceasta înseamnă N = 1 × 3 × 7 × 9 × 11 × 13 × 17 × 19 × .... × 91 × 93 × 97 × 99. Care este ultima cifră a lui N?

Muscalu Adrian

❖Soluție

Se observă că U(1 × 3 × 7 × 9)=U(11 × 13 × 17 × 19)=...=U(91 × 93 × 97 × 99)=9. Atunci $U(N)=U(9^{10})=1$

CLASA a VI a

6.24) Mama i-a pus pe Ana şi pe George să facă curăţenie în camera lor, până la ora 16,00 când se întoarce de la servici. Dacă Ana ar face curăţenie de una singură ar dura 60 de minute, dacă Geoge ar face curăţenie singur ar dura 90 de minute. Copiii luându-se cu joaca nu au observat că timpul a trecut; văzând că este ora 15 şi 20 minute, s-au apucat de curăţenie împreună. Au reuşit să termine până la venirea mamei ?

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

❖Soluție

Notam t timpul în care copiii termină camera lucrând împreună, S_1 - porţiunea din cameră terminată de Ana, S_1 - porţiunea din cameră terminată de George, lucrând împreună.
Ana:
S (Toată camera) ..... 60 min

S_1 (porţiunea din cameră terminată de Ana)..... t min
Deci: $\frac{S}{S_1} = \frac{90}{t}$ de unde: $S_1=\frac{S*t}{60}$. (1)
George:
S (Toată camera) ..... 90 min
S_2 (porţiunea din cameră terminată de George)..... t min
Deci: $\frac{S}{S_2} = \frac{90}{t}$ de unde: $S_2=\frac{S*t}{90}$. (2)
Cum $S=S_1 + S_2$, din (1) şi (2), rezultă: $S=\frac{S*t}{60} + \frac{S*t}{90}$.
În consecinţă: $1= t (\frac{1}{60} + \frac{1}{90})$. Deci: $t = \frac{180}{5}$ min, rezultă t=36 min.
Dacă copiii au început curăţenia la ora 15 si 20 de minute, până la ora 16 au la dispoziţie 40 de minute. Deci vor termina cu 4 minute mai devreme.

6.25)

a) Fie punctele A, B, C coliniare astefel încât $|AB| = 3|BC|$. Dacă lungimea segmentului $|MN|$ este egală cu 40 cm, unde M şi N sunt mijloacele segmentelor $|\mathrm{AB}|$și respectiv$|\mathrm{BC}|$. Să se calculeze lungimea segmentelor $|AB|, |AC|$ și $|BC|$.
b) Fie segmentul $|AB|$ şi punctele M şi N cu proprietatea M aparţine segmentului $|AB|$ şi N aparţine dreptei AB, astfel încât B să aparţină segmentului $|AN|$. Fie P mijlocul segmentului $|AM|$ astfel încât PB= 60 cm şi $|BM|=2|BN|$. Dacă Q este mijlocul segmentului $|AP|$, calculaţi lungimea segmentului $|NQ|$.
c)

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

❖Soluție

a) Cazul I
Fie A, B, C coliniare în această ordine, notăm $|NB| = x$ și $|BM| = y$. Atunci x + y = 40 (1) , $|AB| = 2x$ și $|BC| = 2y$, cum $|AB| = 3|BC|$, rezultă 2x= 3*2y. Deci x=3y (2).
Din (1) şi (2), rezultă x=30 şi y=10. De unde $|AB| = 60, |AC| = 80$ și $|BC| = 20$.
Cazul II
Fie A, C , B coliniare în această ordine, notăm $|NB| = x$ și $|BM| = y$. Atunci x - y = 40 (1) , $|AB| = 2x$ și $|BC| = 2y$, cum $|AB| = 3|BC|$, rezultă 2x= 3*2y. Deci x=3y (2).
Din (1) şi (2), rezultă x=60 şi y=20. De unde $|AB| = 120, |AC| = 80$ și $|BC| = 40$.

b) Dacă notăm lungimea sementului $|AQ|$ =x şi lungimea sementului $|BN|$ =y.
Cum AQ=x, rezulta AP=2x, deci PM=2x (1).
Deoarece BN=y, rezulta BM=2y (2).
Din (1) şi (2) rezultă 2x+2y=60 (cm), rezulta: x+y=30 (cm). Cum NQ=QP+PM+MB+BN, rezulta NQ=3x+3y=3(x+y)=90 (cm).

6.26) Să se determine numerele naturale n, n≠0, astfel încât numărul N= (2017^n – 4)(2017^n – 3)(2017^n – 2) să fie divizibil cu 30.

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

❖Soluție

Dacă notăm a=2017^n – 4, atunci: N= a (a+1) (a+2). Cum produsul a trei numere consecutive este divizibil cu 3, iar produsul a două numere consecutive este divizibil cu 2, numerele 2 și 3 fiind prime între ele, rezultă că numărul N este divizibil cu 6, pentru orice n natural.
Pentru ca numărul să fie divizibil cu 30, mai rămâne de văzut când numărul e divizibil cu 5.
Un număr este divizibil cu 5 dacă ultima lui cifră este 0 sau 5.
Ultima cifră a numărului 2017^n, este ultima cifră a numărului 7^n.
Caz I n=4k+1, rezultă u (7^n)= 7, u(a)= 3, deci u(N)= u (u(a)*u(a+1)*u(a+2))=0, deci N e divizibil cu 5.
Caz II n=4k+2, rezultă u (7^n)= 9, u(a)= 5, deci u(N)= u (u(a)*u(a+1)*u(a+2))=0, deci N e divizibil cu 5.
Caz III n=4k+3, rezultă u (7^n)= 3, u(a)= 9, deci u(N)= u (u(a)*u(a+1)*u(a+2))=0, deci N e divizibil cu 5.
Caz IV n=4k, rezultă u (7^n)= 1, u(a)=7, deci u(N)= u (u(a)*u(a+1)*u(a+2))=4, deci N nu e divizibil cu 5.
Deci N este divizibil cu 30 pentru orice n natural care nu e multiplu de 4.

6.27) Determinaţi toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$, ştiind că numerele $\overline{abc}, \overline{bca}$ *şi* $\overline{cab}$ sunt direct poporţionale cu numerele 52, 76 şi respectiv 94.

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

❖Soluție

Cum $\overline{abc}, \overline{bca}$ *şi* $\overline{cab}$ sunt direct poporţionale cu numerele 26, 38 şi respectiv 47, rezultă:
$\frac{\overline{abc}}{52} = \frac{\overline{bca}}{76} = \frac{\overline{cab}}{94} = \frac{\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}}{52+76+94} = \frac{111\,(a+b+c)}{222} = \frac{a+b+c}{2}$.

Deci: $\frac{\overline{abc}}{52} = \frac{\overline{bca}}{76} = \frac{\overline{cab}}{94} = \frac{a+b+c}{2}$, rezultă $\frac{\overline{abc}}{26} = \frac{\overline{bca}}{38} = \frac{\overline{cab}}{47} = a+b+c \in N$.
De unde rezultă că: $\frac{\overline{abc}}{26} \in N$ (1) și $\frac{\overline{bca}}{38} \in N$, deci $\overline{abc}$ este divizibil cu 26, iar $\overline{bca}$ este divizibil cu 38.

În consecinţă cifrele c şi a trebuie să fie cifre pare, deoarece $\overline{abc}$ şi $\overline{bca}$ se divid cu 26 şi respectiv 38, care sunt divizibile cu 2. Deci c şi a pot lua doar valorile 2,4,6, 8 (nu pot fi zero).

Caz I c=2

Din (1), rezultă:

100a+10b+2= 26(a+b+2) => 50a+5b+1 = 13a+13b+26 => 37a=8b+25, cum a număr par este fals.

Caz II c=4, rezultă:

Din (1), rezultă:

100a+10b+4= 26(a+b+4) => 50a+5b+2 = 13a+13b+52 => 37a=8b+50, cum a=2k, => 37k=4b+25 (1), deci =>k impar poate fi doar 1 sau 3.

100b+40+a= 38(a+b+4) => 50b+20+k = 38k+19b+76 => 31b=37k+56 (2)

400+10a+b= 47(a+b+4) => 212 = 37a+46b=> 106=37k+23b (3)

a) k=1 din (1),(2) şi (3) rezultă:

12=4b =>b=3

31b=93 => b=3

69=23b => b=3.

Deci, o soluţie este: 234

b) k=3 din (1) rezultă: 86=4b fals.

Caz III c=6

Din (1), rezultă:

100a+10b+6= 26(a+b+6) => 50a+5b+3 = 13a+13b+78 => 37a=8b+75, cum a număr par este fals.

Caz IV c=8

Din (1), rezultă:

100a+10b+8= 26(a+b+8) => 50a+5b+4 = 13a+13b+104 => 37a=8b+100, cum a=2k => 37k=4b+50, deci k poate fi doar par 2 sau 4.

100b+80+a= 38(a+b+8) => 50b+40+k = 38k+19b+152 => 31b=37k+112 (2)

800+10a+b= 47(a+b+8) => 424 = 37a+46b=> 212=37k+23b (3)

a) k=2 din (1),(2) şi (3) rezultă:

24=4b =>b=6

31b=16 => b=6

138=23b => b=6.

Deci, o soluţie este: 468

b) k=4 din (1) rezultă: 98=4b fals.

Deci solutiile sunt: 234 si 468.

6.28) Fie ABC un triunghi oarecare, punctul D∈ AC și punctul E ∈ (AB), astfel încât $\widehat{DBC} \equiv \widehat{ECB}$. Se notează cu F intersecția dintre BD și CE. Dacă FA este bisectoarea unghiului $\widehat{EFD}$, atunci:

a) Triunghiul ABC este isoscel ?

b) Dreptele AF și BC sunt perpendiculare ?

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

❖Soluție

Caz I D ∈ (AC)

Cum $\widehat{DBC} \equiv \widehat{ECB}$, rezultă că triunghiul BFC este isoscel.

Deoarece FA e bisectoarea unghiului $\widehat{EFD}$, rezultă că semidreapta opusă ei este bisectoarea unghiului $\widehat{BFC}$ și cum triunghiul BFC este isoscel aceasta este mediatoarea laturii BC în acest triunghi.

Rezultă AF mediatoare în triunghiul ABC, deci ABC este triunghi isoscel și AF este perpendiculară pe BC .

Caz II D ∈ (AC

Cum $\widehat{DBC} \equiv \widehat{ECB}$, rezultă că dreptele EC și BD sunt paralele deci nu se intersectează, deci problema nu are obiect.

Caz III D ∈ (CA

Cum D ∈ (CA, rezultă că $m(\widehat{DBC}) > m(\widehat{ABC})$. Cum m($\widehat{DBC}$) $= m(\widehat{ECB})$, rezultă $m(\widehat{ACB}) > m(\widehat{ABC})$. Deci triunghiul ABC nu e isoscel cu baza BC.

Cum m($\widehat{DFC}$) $= m(\widehat{DFA})$+ m($\widehat{AFC}$) $= 2m(\widehat{AFC})$ (1) și m($\widehat{DFC}$) $= m(\widehat{FBC})$+ m($\widehat{FCB}$) $= 2m(\widehat{FCB})$ (2) ($\widehat{DFC}$ este unghi exterior în triunghiul DFC).

Din (1) și (2) rezultă că $m(\widehat{AFC}) = m(\widehat{FCB})$, deci AF și BC sunt paralele (unghiuri alterne interne).

6.29) Considerăm mulţimea cifrelor {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}. O grupă de cercetaşi vor să-şi dezvolte propriul cod. Menționăm că, "cuvintele" pot avea lungime de la unu la zece (adică pot fi formate din unu până la zece cifre) și că 0 nu poate avea prima poziție în "cuvânt" (pentru a semăna cu numerele).

Câte "cuvinte" se pot forma cu aceste cifre ?

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

❖Soluție

Pentru "cuvintele" de lungime 1, putem avea 9 posibilități: 1,2,…,9 (fără 0).

Pentru “cuvintele” de lungime 2, care sunt de forma 10, 11, ...etc, putem avea 9*10=90 posibilități (pentru prima poziție 9 posibilități (fără 0) , pentru a doua cifră 10 posibilități).
Pentru “cuvintele” de lungime 3, care sunt de forma 100, 101,... etc, putem avea 9*10*10 = 900 posibilități (pentru prima poziție 9 posibilități (fără 0) , pentru a doua cifră 10 posibilități, pentru a treia cifră 10 posibilități).
...
Analog pentru “cuvintele” de lungime 10, care sunt de forma 100..0, 10...1,... etc, putem avea $9*10*10*...*10 = 9*10^9$ posibilități (pentru prima poziție 9 posibilități (fără 0) , pentru a doua cifră 10 posibilități).
În total se pot forma $9+9*10 +9* 10^2 +... + 9* 10^9= (10 – 1) + (10-1)*10 + (10-1)* 10^2+... + (10-1)*10^9= (10 -1) + (10^2-10) + (10^3-10^2) +... (10^{10} -10^9) = 10^{10} -1$ “cuvinte”.

6.30) Andrei, Victor şi Mihai fac parte din echipa de atletism a școli și se antrenează împreună pentru concursurile interșcolare. Ei pleacă în acelaşi timp, din acelaşi loc, alergând pe aceeaşi direcţie. Andrei aleargă câte 8 minute şi se odihneşte 4 minute, Victor aleargă câte 10 minute şi se odihneşte 5 minute, iar Mihai aleargă câte 6 minute şi se odihneşte 3 minute. După câte minute pornesc în alergare în acelaşi timp din nou ?

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

❖Soluție

O rundă de alergare/pauză pentru Andrei durează 12 minute, pentru Victor 15 minute şi pentru Mihai 9 minute.
Cum c.m.m.m.c (12,15, 9) = 3*4*5*3=180, înseamnă că se după 180 minute = 3 ore, vor porni din nou în alergare din acelaşi loc și în același timp.

6.31) Găsiţi cel mai mic şi cel mai mare număr format din 2017 cifre, cu proprietatea că cifrele învecinate, din care este format numărul, au parităţi diferite şi numărul este divizibil cu 18.

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

❖Soluție

Pentru ca numărul să fie divizibil cu 18, trebuie să fie divizibil cu 2 şi cu 9. Pentru ca numărul să fie divizibil cu 2, ultima cifră trebuie să fie pară. Cum numărul este format din 2017 cifre, rezultă că, prima cifră trebuie să fie tot pară.
Deci pentru cel mai mic număr, prima cifră va fi 2 (nu poate fi 0), următoarea 1, apoi 0, apoi 1 şi tot aşa, până la a 2013 a cifră care va fi 0, deci suma cifrelor va fi 1008 (deci divizibil cu 9). Mai rămân patru cifre, două pare şi două impare, deci cu suma

pară, care trebuie să fie divizibilă şi cu 9, deci trebuie să fie 18. Pentru a fi minimă trebuie să avem 1, apoi 8, iar 1, apoi final 8.
Deci, cel mai mic număr, va fi 21010....10101818.
Deci pentru cel mai mare număr, prima cifră va fi 8, următoarea 9, apoi 8, apoi 9 şi tot aşa, până la a 2013 a cifră care va fi 9, deci suma cifrelor va fi 9*1006+8*1007=M9+8056=M9+1. Mai rămân patru cifre, două pare şi două impare, deci cu suma pară,care trebuie să dea restul 8 la împărţirea cu 9. Pentru a fi maximă, trebuie să avem 9, apoi 8, iar 9, apoi final 0.
Deci, cel mai mare număr, va fi 898989....98989890.

6.32)

a) Să se determine numerele naturale x și y, unde x este număr prim, cu proprietatea că: $35x + y^2 + 11y = 210$.

b) Să se determine numerele naturale a și b, cu proprietatea că:
$a^3 + a^6 + b^6 = 133617$.

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

❖Soluție

a) Ecuația $35x + y^2 + 11y = 250$ se poate scrie astfel: $35x + y\,(y + 11) = 250$ (1).
y (y+11) este un număr par, oricare ar fi y natural (2)
Din (1) și (2) rezultă că 35x este un număr par, de unde x este par, cum x este prim rezultă că x=2.
Atunci ecuația (1) devine y(y+11)= 180.
i) y < 8 rezultă y(y+11) < 8*19 = 152, de unde 180 < 152 fals
ii) y=9 rezultă y(y+11)= 9*20 =180, adevărat
iii) y ≥10 rezultă y(y+11) ≥ 10*21= 210 , de unde 180 ≥ 210 fals.
Deci, soluția este x=2 și y=9.

b) Ecuația $a^3 + a^6 + b^6 = 133617$ se poate scrie astfel: $a^3(a^3 + 1) + b^6 = 133617$ (1).
Cum $a^3(a^3 + 1)$ este un număr par, pentru orice a natural și cum 133617 este impar, rezultă b^6 este impar, deci b număr impar.
i) Pentru b ≥ 9 rezultă $b^6 \geq 531441$, deci $a^3(a^3 + 1) + b^6 \geq b^6 \geq 531441$ fals.
ii) Pentru b =7 rezultă $b^6 = 117649$, deci $a^3(a^3 + 1) = 15968$.
Dacă a ≤ 5 rezultă $a^3(a^3 + 1) \leq 125 * 126 = 15750$, deci 15968 ≤ 15750 fals
Dacă a ≥ 6 rezultă $a^3(a^3 + 1) \geq 46656$, deci 15968 ≥ 46656 fals
iii) Pentru b = 5 rezultă $b^6 = 15625$, deci $a^3(a^3 + 1) = 117992$
Dacă a ≤ 6 rezultă $a^3(a^3 + 1) \leq 46656$, deci 117992 ≤ 46656 fals
Dacă a=7 rezultă $a^3(a^3 + 1) = 117992$ adevărat
Dacă a ≥ 8 rezultă $a^3(a^3 + 1) \geq 262656$ fals.

iv) Pentru b =3 rezultă $b^6 = 729$, deci $a^3(a^3+1) = 132888$.
Dacă a ≤ 7 rezultă $a^3(a^3+1) \leq 117992$, deci $132888 \leq 117992$ fals
Dacă a ≥ 8 rezultă $a^3(a^3+1) \geq 262656$, deci $132888 \geq 262656$ fals
v) Pentru b =1 rezultă $b^6 = 1$, deci $a^3(a^3+1) = 133616$.
Dacă a ≤ 7 rezultă $a^3(a^3+1) \leq 117992$, deci $133616 \leq 117992$ fals
Dacă a ≥ 8 rezultă $a^3(a^3+1) \geq 262656$, deci $133616 \geq 262656$ fals.
Deci soluția este a=7 și b=5.

6.33) Fie triunghiul oarecare ABC, cu proprietatea că < BAC este obtuz. Fie perpendiculara în A pe AC intersectează pe BC în D, iar perpendiculara în A pe AB intersectează pe BC în E. Notăm cu F intersecția dintre înălțimea din E a triunghiului AEC și înălțimea din D a triunghiului ADB.
Demonstrați că:
a) AF și BC sunt perpendiculare;
b) D este ortocentru în triunghiul ABF;
c) AE este perpendiculară pe FC.

prof . Ftadeev-Brad Adriana-Floriana

❖Soluție

a) Cum triunghiurile ABE și ACD sunt congruente conform cazului C.U. (AB≡AC, < B≡ <C, <BAE ≡ <CAD (unghiuri drepte)) => AE≡ AD (1).
Cum dreptele AE și DF sunt perpendiculare pe dreapta AB => AE și DF sunt paralele (2). Analog se demonstrează că AD și FE sunt paralele (3).
Din (1), (2) și (3) rezultă că ADFE este romb. Cum într-un romb diagonalele sunt perpendiculare, rezultă că AF și BC sunt perpendiculare.
b) În triunghiul ABF: FD este înălțime (FD este perpendiculară pe AB din ipoteză), BD este înălțime (din pct. a)).
c) Analag pct. b) se demonstrează că E este ortocentru în triunghiul AFC, rezultă că AE este perpendiculară pe FC.

CLASA a VII a

7.23) Rezolvaţi în Q ecuaţia: $\frac{x-10}{2010} + \frac{x-17}{2003} = \frac{x-2010}{10} + \frac{x-2003}{17}$.

❖Soluție

Ecuaţia se scrie: $\frac{x-2020+2010}{2010} + \frac{x-2020+2013}{2013} = \frac{x-2020+10}{10} + \frac{x-2020+17}{17}$.
Rezultă că (x-2020)$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15} - \frac{1}{2010} - \frac{1}{2013}\right) = 0$ şi x=2020.

7.24) Determinaţi numerele x$\in Z-\{1\}$ pentru care $\sqrt{\frac{x+34}{x-1}}$ este număr întreg.

❖Soluție

Dacă $\sqrt{\frac{x+34}{x-1}} \in Z$ atunci $\frac{x+34}{x-1} \in N$.

$\frac{x+34}{x-1}$=1+$\frac{35}{x-1}$.Ar trebui ca(x-1)/35, deci x$\in \{2,6,8,36\}$. Condiţiile problemei sunt verificate de x=2.

7.25) Aflaţi numărul natural nenul n, astfel încât

$\frac{1}{3*5}+\frac{2}{5*9}+\frac{4}{9*17}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{2^{2016}-1}{3(2^{2017}+1)}$.

❖Soluție

$(2^{n+1}+1)-(2^n+1)=2^n$

$\frac{1}{3*5}+\frac{2}{5*9}+\frac{4}{9*17}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{9})+\frac{1}{2}(\frac{1}{9}-\frac{1}{17})+\ldots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1})=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1})=\frac{2^n-1}{3(2^{n+1}+1)}$. Se obţine x=2016

7.26) Fie numărul x=$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5^2}+\sqrt{5^3}+\cdots+\sqrt{5^{200}}}{6\sqrt{5}+30}$.Arătaţi că x este număr natural.

❖Soluție

$\sqrt{5}+\sqrt{5^2}+\sqrt{5^3}+\cdots+\sqrt{5^{200}}=\sqrt{5}(1+\sqrt{5}+\sqrt{5^2}+\sqrt{5^3}+\cdots+\sqrt{5^{199}})=\sqrt{5}\frac{\sqrt{5^{200}}-1}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{5}\frac{(5^{100}-1)(\sqrt{5}+1)}{4}$

X=$\frac{\sqrt{5}(5^{100}-1)(\sqrt{5}+1)}{24\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}=\frac{25^{50}-1}{24}=\frac{(24+1)^{50}-1}{24}$.

7.27) Determinaţi mulţimea A=$\left\{a \in Z \middle| \frac{\sqrt{12+6\sqrt{3}}+\sqrt{19+8\sqrt{3}}-\sqrt{16-8\sqrt{3}}}{2a+1} \in Z\right\}$.

❖Soluție

$\sqrt{12+6\sqrt{3}}=3+\sqrt{3}, \sqrt{19+8\sqrt{3}}=4+\sqrt{3}, \sqrt{16-8\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-2$

$\frac{\sqrt{12+6\sqrt{3}}+\sqrt{19+8\sqrt{3}}-\sqrt{16-8\sqrt{3}}}{2a+1}=\frac{9}{2a+1} \in Z$,samd.

7.28) Rezolvaţi în N ecuaţia:$\left[\sqrt{1*5}\right]+\left[\sqrt{2*6}\right]+\ldots+\left[\sqrt{n(n+4)}\right]$=230,unde $[x]$reprezintă partea întreagă a numărului real x.

❖Soluție

$n^2+2n+1 \leq n(n+4) < n^2+4n+4$ pentru n∈ N. Rezultă că $\left[\sqrt{n(n+4)}\right] = n+1$.
Ecuaţia devine 2+3+…+(n+2)=230, $\frac{(n+2)(n+3)}{2} = 231, samd$.n=19.

7.29) Se consideră un paralelogram ABCD cu centrul O. Punctele M şi N sunt mijloacele segmentelor $[BO]$ şi $[CD]$. Dacă triunghirile ABC şi AMN sunt asemenea, demonstraţi că ABCD este pătrat.

❖Soluție

Din ΔABC~ΔAMN rezultă că $\frac{AM}{AB}$=$\frac{AN}{AC}$ și $\sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle BAC$. Deducem că $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAN$, prin urmare ΔBAM~ΔCAN, de unde $\frac{AB}{AC}$=$\frac{BM}{CN}$ și $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle NCA$. Întrucât $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle BDC$, obținem că $\sphericalangle ODC \equiv \sphericalangle OCD$ și astfel ABCD va fi dreptunghi. Apoi, cum BM=1/4 BD=1/4 AC și CN= ½ CD, rezultă că $\frac{AB}{AC}$=$\frac{AC}{2AB}$, adică 2 AB^2=AC^2, deci 2 AB^2=AB^2+BC^2. Deducem că BC=AB, ceea ce înseamnă că ABCD va fi pătrat.

7.30) În pătratul ABCD se consideră punctele M∈(BC) şi N∈AD. Fie $\{P\}$=AM∩ BD. Demonstraţi că dreptele CP şi BN sunt perpendiculare dacă şi numai dacă dreptele MN şi AB sunt paralele.

❖Soluție

ΔABP ≡ ΔCBP(LUL). Rezultă că $\sphericalangle ABP \equiv \sphericalangle BCP$.Dacă CP⊥BN,atunci $\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle BCP$ .Rezultă că $\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle BAM$,de unde ΔABN ≡ ΔBAM(CU) și deci $[AN] \equiv [BM]$.ABMN este astfel dreptunghi și MN‖ AB.

7.31) Măsurile unghiurilor formate în jurul unui punct O sunt exprimate prin puteri ale numărului natural 5. Aflaţi numărul minim de unghiuri în condiţiile date şi indicaţi care sunt aceste n măsuri.

❖Soluție

Fie $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n$ măsurile unghiurilor ,$a_1+a_2+\cdots+a_n = 360^0$.(1)
$a_1 = 5^{x_1}, a_2 = 5^{x_2}$,….,$a_n = 5^{x_n}$.
Relaţia (1) se scrie:
$5^{x_1}(1+5^{X_2-x_1}+5^{X_3-x_1}+\cdots+5^{X_n-x_1}) = 5*72$. Pentru aobţine un număr minim de unghiuri, $x_1 = 1. samd$.

7.32) Fie paralelogramul ABCD şi punctele M,N mijloacele laturilor $[AB]$ şi respectiv $[BC]$. Dacă punctul P este intersecţia dreptelor AN şi DM, iar Q este mijlocul segmentului $[DP]$, demonstraţi că P este centrul de greutate al triunghiului ABQ.

❖Soluție

Fie R=AN ∩ CD. Din congruenţa triunghiurilor ABN şi RCN rezultă că AB=CR. Din asemănarea triunghiurilor AMP şi RDP, raport de asemănare 1:4 , obţinem AP= 4PM. Deoarece QP=$\frac{1}{2}$DP şi QM mediană în triunghiul ABQ, rezultă că P este centrul de greutate al triunghiului ABQ.

P*roblemele 7.23-7.32 au fost selectate de Prof.* Căpriță Doru-Marian

7.33) Aflați suma primelor 29 de zecimale ale numarului $N=(\sqrt{2016}-45)^{100}$.

Valentina și Liviu Radu, Tulcea.

Soluție. $N=(\sqrt{2016}-45)^{100}=(45-\sqrt{2016})^{100}$,

dar $44<\sqrt{2016}<45$ pentru că $44^2<2016<45^2 \Leftrightarrow 1936<2016<2025$.

Cum $2025-2016<2016-1936$, atunci diferența

$d=\sqrt{2025}-\sqrt{2016}<\frac{1}{2}$, deci $d=45-\sqrt{2016}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow d<\frac{1}{2}$.

Așadar $d<\frac{1}{2}\Leftrightarrow d^{100}<\left(\frac{1}{2}\right)^{100}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]^{10}=\left(\frac{1}{1024}\right)^{10}<\left(\frac{1}{10^3}\right)^{10}<\frac{1}{10^{30}}$.

Deci $N=d^{100}<\frac{1}{10^{30}}=0,00\ldots01$ unde după virgulă avem 30 de zecimale.

In concluzie, suma primelor 29 de zecimale ale numărului N este nulă.

CLASA a VIII a

8.23) Se consideră un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile *a*, *b* și *c*. Dacă $\frac{a+2b}{a-b}=\frac{3}{2}$ și $\frac{2b-c}{b+3c}=\frac{1}{2}$, demonstrați că paralelipipedul poate fi umplut cu un număr întreg de cuburi de aceeași dimensiune.

Prof. Marcelina Popa

❖Soluție

E suficient să demonstrăm că există numerele naturale *m*, *n*, *p* și numărul real pozitiv *l* (muchia unui cubuleț) astfel încât $a=ml, b=nl, c=pl$.

$\frac{a+2b}{a-b}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow a=7b$

$\frac{2b-c}{b+3c}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 3b=5c\Leftrightarrow c=\frac{3b}{5}$.

Încercăm să-i exprimăm pe m,n,p,l în funcție de a,b,c:

$$\begin{cases} ml=a \\ nl=b \\ pl=c \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} ml=7b \\ nl=b \\ pl=\frac{3b}{5} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=7n \\ l=\frac{b}{n} \\ p=\frac{3n}{5} \end{cases}$$

Pentru ca ultimele trei relații să se verifice pentru *m, n* și *p* naturale,e suficient să luăm *n=5* (ar fi convenit, de altfel, orice multiplu de *5*). Obținem: *m=35, n=5, p=15,* iar $l=\frac{b}{5}$, deci $a=35l,\ b=5l,\ c=15l$. Paralelipipedul poate fi umplut cu $35\cdot 5\cdot 15=2625$ cuburi de latură $l=\frac{b}{5}$.

8.24) Fie $x,y,z\in R$ cu proprietățile $x+y+z=2$ și $|x-1|+|y-1|+|z-1|=1$. Demonstrați că $x\le 1, y\le 1, z\le 1$.

Prof. Marcelina Popa

❖Soluție

Notăm $a=x-1,\ b=y-1,\ c=z-1$ și relațiile din ipoteză devin:

(1) $a+b+c=-1$

(2) $|a|+|b|+|c|=-1$

Vom demonstra că $a\le 0, b\le 0, c\le 0$. Să presupunem prin absurd, de exemplu, că $a>0$. Din (1) rezultă atunci că $b+c<-1$, deci $|b+c|>1$. Obținem imediat:

$|a|+|b|+|c|\ge|b|+|c|\ge|b+c|>1$,

ceea ce contrazice relația (2). Deci $a\le 0, b\le 0, c\le 0$, de unde $x\le 1, y\le 1, z\le 1$.

8.25) Se consideră expresia $E(x,y)=\frac{6x^2-xy-y^2}{3x+y}$, unde $x,y\in[1,3]$. Aflați valoarea maximă și valoarea minimă a lui $E(x,y)$.

Prof. Marcelina Popa

❖Soluție

$6x^2-xy-y^2=6x^2+2xy-3xy-y^2=2x(3x+y)-y(3x+y)=(3x+y)(2x-y)$

Rezultă atunci că $E(x,y)=2x-y$.

$1\le x\le 3\Rightarrow 2\le x\le 6$

$1\le y\le 3\Rightarrow -3\le -y\le -1$

Obținem că $-1\le 2x-y\le 5$, având egalitate pentru $x=1,\ y=3$, respectiv $x=3,\ y=1$.

În concluzie, $E(x,y)$ are valoarea minimă *-1* și valoarea maximă *5*.

8.26) Determinați $x,y\in R$ cu proprietatea:

$$\sqrt{\frac{x+y}{3}}+\sqrt{\frac{3}{x+y}}+|x-2y|=2$$

Prof. Marcelina Popa

❖Soluție

Din condițiile de existență rezultă: $x+y>0$

Notăm $a=\sqrt{\frac{x+y}{3}}>0\Rightarrow \sqrt{\frac{3}{x+y}}=\frac{1}{a}$.. Știm că pentru orice $a>0$, avem $a+\frac{1}{a}\ge 2$, cu egalitate dacă și numai dacă $a=1$.

Dar, întrucât $|x-2y|\ge 0$, din ecuația data rezultă că $a+\frac{1}{a}\le 2.$ Obținem că $a=1$, deci $x+y=3$.

Ecuația devine $|x-2y|=0$, adică $x=2y$. Ținând cont și de faptul că $x+y=3$, obținem imediat că $x=2$ și $y=1$.

8.27) Să se rezolve în $(1,\infty)$ ecuația:

$$\frac{2x-1}{x(x-1)}+\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}=\frac{25}{12}$$

Prof. Marcelina Popa

❖Soluție

Observăm ca numărătorul fiecărei fracții este egal cu suma celor doi factori de la numitor.

Avem $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, deci ecuația devine:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{25}{12}$$

Notăm cu *E(x)* expresia din primul membru. Pentru *x=2*, ecuația se verifică.

Pentru *x<2*, avem $E(x)>\frac{25}{12}$, iar pentru *x>2*, avem $E(x)<\frac{25}{12}$ (am folosit aici faptul că numitorii sunt pozitivi, fiindcă *x>1*).
Rezultă că singura soluție a ecuației din $(1,\infty)$este *x=2*.

8.28) Fie ABCD un tetraedru cu toate fețele triunghiuri ascuțitunghice. Dacă $\angle ABD\equiv\angle ABC$ și $\angle ACB\equiv\angle ACD$, demonstrați că $\angle ADC\equiv\angle ADB$.

Prof. Marcelina Popa

❖Soluție

Fie $AO\perp(BCD), O\in(BCD)$. Fie M, N, P proiecțiile lui A pe (BC), (BD), respectiv (CD). Aplicând prima reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $OM\perp BC, ON\perp BD$, respectiv $OP\perp CD$.
Din congruența triunghiurilor OMB și ONB (I.U.), rezultă că $(BM)\equiv(BN)$. Deducem că și triunghiurile OMB și ONB sunt congruente (I.C.), deci $\angle CBO\equiv\angle DBO$.
Am demonstrat astfel că [BO este bisectoarea unghiului CBD. Analog rezultă că [CO este bisectoarea unghiului BCD, deci O este intersecția bisectoarelor triunghiului BCD. Atunci și [DO va fi bisectoarea unghiului ADC. Din congruența triunghiurilor DOP și DON (I.U.), deducem că $(DP)\equiv(DN)$, de unde rezultă, în continuare, că triunghiurile ADP și ADN sunt congruente și, în fine, că $\angle ADC\equiv\angle ADB$.

8.29) Dacă *a* și *b* sunt două numere naturale impare, arătați că media geometrică a numerelor *a* și *a+2b* este un număr irațional.

Prof. Marcelina Popa

❖Soluție

Trebuie să demonstrăm că $\sqrt{a(a+2b)}\notin Q$, adică să demonstrăm că a^2+2ab nu e pătrat perfect.
Cum *a* este impar, rezultă că $\exists k\in N$ astfel încât $a^2=4k+1$. Produsul *ab* este și el impar, conform ipotezei, deci are forma $2s+1,\ s\in N$. Obținem:

$$a^2+2ab=4k+1+2(2s+1)=4(k+s)+3$$

Dar un pătrat perfect nu poate fi decât de una din formele *4n* sau *4n+1,* deci a^2+2ab nu e pătrat perfect, de unde rezultă că $\sqrt{a(a+2b)}\notin Q$

8.30) Determinați numărul natural nenul *n* astfel încât:

$$[\sqrt{1\cdot3}]+[\sqrt{3\cdot5}]+\ldots[\sqrt{(2n-1)(2n+1)}]=5675$$

Prof. Marcelina Popa

❖Soluție

Vom demonstra că $[\sqrt{(2k-1)(2k+1)}]=2k-1,\ \forall k\in N^*$. Aceasta este echivalent cu:

$2k-1\le\sqrt{(2k-1)(2k+1)}<2k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k^2-4k+1\le 4k^2-1<4k^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4k+1\le -1<0$

Ultima inegalitate dublă este adevărată, deci $[\sqrt{(2k-1)(2k+1)}]=2k-1,\ \forall k\in N^*$.

Atunci ecuațiadevine succesiv:

$1+3+5+...+(2n-1)=5675$

$2\cdot 1-1+2\cdot 2-1+2\cdot 3-1+...+2\cdot n-1=5675$

$2(1+2+3+...+n)-n=5675$

$2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n=5675$

$n^2=5675$

$n=\sqrt{5675}$

$n=75$

8.31) Rezolvați în***N*** ecuația: $x^5-x^4-x^3-x^2+x+1=0$

Prof. Marcelina Popa

❖Soluție

Observăm că *x=0* nu este soluție a ecuației, iar *x=1* este soluție. Vom demonstra că pentru orice altă valoare naturală a lui *x* avem

(1) $x^5-x^4-x^3-x^2+x+1>0$,

de unde va rezulta că singura soluție a ecuației este *x=1*.

Să observăm că orice *x* natural mai mare sau egal ca 2 poate fi privit ca o bază de numerație, deci inegalitatea (1) se scrie eechivalent:

$x^5+x+1>x^4+x^3+x^2 \Leftrightarrow 100011_{(x)}>11100_{(x)}$,

eea ce este adevărat, pentru că numărul din primul membru are mai multe cifre decât cel din membrul al doilea.

8.32) Fie *VABCD* o piramidă patrulateră regulată cu fețele laterale triunghiuri echilaterale. Fie *M* mijlocul lui *[VA]* și *x* măsura unghiului dintre dreapta *BM* și planul *(VBC)*. Arătați că $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Prof. Marcelina Popa

❖Soluție

Fie *O* centrul bazei, *N* mijlocul lui *(BC)* și *P* piciorul perpendicularei din *O* pe *VN*. Observăm că

$$(1) \quad \sin x = \frac{d(M,(VBC))}{BM}$$

Cum *[OM]* este linie mijlocie în triunghiul *VAC*, avem:

$$OM \,||\, VC \Rightarrow OM \,||\, (VBC) \Rightarrow d(M,(VBC)) = d(O,(VBC))$$

Aplicând, de exemplu, reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare, rezultă ca *OP* este perpendiculară pe *(VBC)*, deci *d(O,(VBC))=OP*.
Notând *a=AB*, obținem imediat:

$$ON = \frac{a}{2}, \quad VN = BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \; VO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Prin urmare,

$$d(M,(VBC)) = OP = \frac{VO \cdot ON}{VN} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

De unde, ținând cont de (1), obținem:

$$\sin x = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}}{BM} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$