CLASA a IX – a

9.23) Să se arate că $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k^2+4k+2)\sqrt{k(k+1)(k+2)}} < \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$, pentru orice n număr natural nenul.

❖ Soluţie

Pentru $x, y > 0$ din inegalitatea mediilor armonică respectiv geometrică, avem că $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}$, de unde obţinem că $\frac{2}{(x+y)\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{xy}$.

Atribuind lui x şi y valorile k, respectiv $(k+1)(k+2)$ obţinem relaţia:

$$\frac{2}{\big((k+1)(k+2)+k\big)\sqrt{k(k+1)(k+2)}} < \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \qquad (*)$$

(Inegalitatea e strictă, deoarece $k \neq (k+1)(k+2)$.)

Dar $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$. Însumând după k, reiese că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\begin{matrix} \frac{1}{1} & -\frac{2}{1+1} & +\frac{1}{1+2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{2+1} & +\frac{1}{2+2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3+1} & +\frac{1}{3+2} \\ & \vdots & \\ \frac{1}{n} & -\frac{2}{n+1} & +\frac{1}{n+2} \end{matrix}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \qquad (**)$$

Însumând relaţia (*) şi utilizând apoi identitatea (**) rezultă concluzia.

9.24) Pentru *x,y,z* numere reale pozitive astfel încât *xyz=1*, arătaţi că

$$x(y+1) + y(z+1) + z(x+1) \leq x^2 + y^2 + z^2 + 3$$

❖ Soluţie

Inegalitatea este echivalentă cu

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 - (xy + yz + zx) - (x + y + z) \geq 0$$

Deoarece numerele sunt positive şi $xyz = 1$, se disting cazurile:

- Toate cele trei numere sunt egale cu 1, calcul elementar, inegalitatea este adevărată.
- Două numere sunt egale cu 1, atunci toate cele trei numere sunt egale cu 1, cazul anterior
- Un număr este egal cu 1, atunci celelalte două sunt unul subunitar , celălalt supraunitar
- Toate cele trei numere sunt diferite de 1. În acest caz, atunci două dintre cele trei numere sunt simultan subunitare sau supraunitare. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că *x şi y* sunt acestea.

Deci, *(1-x)(1-y)>0.* Incluzând şi cazul anterior în care presupunem că unul dintre x sau y este 1, obţinem deci că $(1-x)(1-y) \geq 0$. Înmulţind relaţia cu *z>0* se obţine $z - yz - xz + xyz \geq 0$, echivalent cu $z + 1 \geq zy + zx$. Aşadar,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 - (xy + yz + zx) - (x + y + z)$$
$$\geq x^2 + y^2 + z^2 + 3 - xy - 1 - z - x - y - z$$
$$= (z^2 - 2z + 1) + \left(x^2 - x(y+1) + \left(\frac{y+1}{2}\right)^2\right) + y^2 - y + 1$$
$$- \frac{y^2 + 2y + 1}{4} = (z-1)^2 + \left(\frac{2x - y - 1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y-1}{2}\right)^2 > 0$$

9.25) Să se afle prima zecimală a numărului real $x = \sqrt{n^2 + 15n + 56}$ pentru n, număr natural nenul.

❖ Soluţie

$n^2 + 15n + 56 = (n+7)(n+8)$. Notând $n + 7 = k$, $k \epsilon \mathbb{N}$, atunci

$x = \sqrt{k(k+1)} = \sqrt{k^2 + k} < \sqrt{k^2 + k + \frac{1}{4}} = k + \frac{1}{2} = k + 0{,}5.$

Deci, prima zecimală a numărului real x este mai mică decât 5.

(*)

Demonstrăm că $x \geq k + 0{,}4$ (**)

$x \geq k + 0{,}4 \iff x^2 \geq (k + 0{,}4)^2 \iff k^2 + k \geq (k + 0{,}4)^2 \iff k \geq 8 \iff n + 7 \geq 8 \iff n \geq 1$, adevărat.

Din (*) şi (**) reiese că prima zecimală a lui x este 4.

9.26) Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, astfel încât $3(x+1) < f(x) + 1$ şi $3x \geq f(x) - 2$.

i. Determinaţi $f\left(\frac{2017}{2019}\right)$

ii. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = 2018$

❖ Soluţie

Cum $f(x) \in \mathbb{Z}$ şi din relaţia $f(x) \leq 3x + 2 < f(x) + 1$ obţinem că $[3x + 2] = f(x)$.

Deci, $f(x) = [3x] + 2$.

Atunci $f\left(\frac{2017}{2019}\right) = 2 + \left[\frac{2017}{673}\right] = 4$, iar $[3x] = 2016 \iff x \in \left[672; \frac{2017}{3}\right)$.

9.27) Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Arătaţi că

$$3(GA^2 + GB^2 + GC^2) = CA^2 + AB^2 + BC^2$$

❖ Soluţie

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = 0 \iff GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\left(\overrightarrow{GA}\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA}\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}\overrightarrow{GB}\right) = 0$ (*)

Produsul scalar $\overrightarrow{GA}\overrightarrow{GB} = GA \cdot GB \cdot \cos(\widehat{AGB})$
Teorema cosinusului aplicată în triunghiul AGB: $AB^2 = GA^2 + GB^2 - 2 \cdot GA \cdot GB \cdot \cos(\widehat{AGB})$
Deci, $2 \cdot \overrightarrow{GA}\overrightarrow{GB} = GA^2 + GB^2 - AB^2$.
Analog, $2 \cdot \overrightarrow{GA}\overrightarrow{GC} = GA^2 + GC^2 - AC^2$
$2 \cdot \overrightarrow{GC}\overrightarrow{GB} = GC^2 + GB^2 - CB^2$
Înlocuind în relaţia (*) se obţine identitatea cerută.

9.28) Să se determine funcţiile $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că
$$f(x) + f([x]) \cdot f(\{x\}) = x, \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}$$

❖ Soluţie

Pentru $x = 0$, se obţine $f(0) + f(0) \cdot f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \; sau \; f(0) = -1$
Dacă $x \in (0,1)$ şi $f(0) = -1$, $[x] = 0, \{x\} = x$, $obţinem \; 0 = x, contradicţie$.
Deci, $f(0) = 0$ (*)
În relaţia dată, atribuind $x \leftarrow [x]$, $respectiv \; x \leftarrow \{x\}$, reiese că
$f([x]) + f([[x]]) \cdot f(\{[x]\}) = [x] \Leftrightarrow f([x]) = [x]$ respectiv,
$f(\{x\}) + f([\{x\}]) \cdot f(\{\{x\}\}) = \{x\} \Leftrightarrow f(\{x\}) = \{x\}$
Atunci, $f(x) = x - [x] \cdot \{x\}$, $\forall x \epsilon \mathbb{R}$

9.29) Fie triunghiul ABC şi $k \epsilon (1, \infty) \setminus \{2\}$. Pe laturile AB respectiv AC se iau punctele D, M respectiv N, E astfel încât $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $k\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $(k-1)\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE}$ iar P este mijlocul segmentului DE. Să se demonstreze că punctele M, N, P sunt coliniare.

❖ Soluţie

[MQ] fiind linie mijlocie în triunghiul ABC, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (*)
$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DP}$
$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{DA} = \frac{2-k}{2k}\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}\right) = -\frac{1}{2k}\overrightarrow{AB} + \frac{k-1}{2k}\overrightarrow{AC}$
Deci, $\overrightarrow{MP} = \frac{k-1}{2k}\overrightarrow{AC} + \left(\frac{2-k-1}{2k}\right)\overrightarrow{AB} = \frac{k-1}{k}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{k-1}{k}\overrightarrow{MN}$, conform (*).
Ceea ce implică coliniaritatea vectorilor $\overrightarrow{MP}$ şi $\overrightarrow{MN}$, deci M,N,P sunt coliniare.

Probleme propuse și selectate de prof. dr. **Liliana Anastasiu**

9.30) Arătați că numărul $n = 11\ldots122\ldots25$ este pătrat perfect.
2017*ori* 2018*ori*

Valentina și Liviu Radu, Tulcea

❖ Soluţie

$$n=\underbrace{11....1}_{2017ori}\underbrace{22....2}_{2018ori}5=\underbrace{11....1}_{2017ori}\cdot 10^{2019}+\underbrace{22...2}_{2018ori}\cdot 10+5=(1+10+10^2+...+10^{2016})\cdot 10^{2019}$$
$$+2\cdot(1+10+10^2+...+10^{2017})\cdot 10+5=\frac{10^{2017}-1}{10-1}\cdot 10^{2019}+2\cdot\frac{10^{2018}-1}{10-1}\cdot 10+5=$$
$$=\frac{10^{4036}-10^{2019}+2\cdot 10^{2019}-20+45}{9}=\frac{10^{4036}+20^{2019}+25}{9}=\frac{10^{4036}+2\cdot 10^{2018}\cdot 5+25}{9}=$$
$$=\left(\frac{10^{2018}+5}{3}\right)^2$$

9.31) Cum suma cifrelor de la numărător este 6, numărătorul fracției este multiplu de 3 și deci fracția este număr natural și n este pătrat perfect.

Să se demonstreze că pentru orice $x\in\boldsymbol{R}$, există $n\in\boldsymbol{N}^*$ astfel încât:
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{x+4^{k-1}}{4^k}\right]+\left[\frac{x+2\cdot 4^{k-1}}{4^k}\right]+\left[\frac{x+3\cdot 4^{k-1}}{4^k}\right]\right)=\begin{cases}[x], & x\geq 0\\ [x]+1, & x<0\end{cases}.$$

***Petre Guțescu*, Tulcea**

❖ Soluţie

Folosind identitatea *Hermite* putem scrie:
$\left[\frac{x}{4^k}\right]+\left[\frac{x}{4^k}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{x}{4^k}+\frac{2}{4}\right]+\left[\frac{x}{4^k}+\frac{3}{4}\right]=\left[4\cdot\frac{x}{4^k}\right]$, $\forall x\in\boldsymbol{R}$, de unde
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{x+4^{k-1}}{4^k}\right]+\left[\frac{x+2\cdot 4^{k-1}}{4^k}\right]+\left[\frac{x+3\cdot 4^{k-1}}{4^k}\right]\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{x}{4^{k-1}}\right]-\left[\frac{x}{4^k}\right]\right)=[x]-\left[\frac{x}{4^n}\right]\quad(1).$$

Pentru orice $x\in\boldsymbol{R}$ există $n\in\boldsymbol{N}^*$ astfel încât $|x|<4^n\Rightarrow 0\leq\frac{|x|}{4^n}<1\Rightarrow\left[\frac{x}{4^n}\right]=\begin{cases}0, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}\quad(2).$

Din (1) și (2) se obține enunțul.

CLASA a X – a

10.20) Plecand de la ecuatia $3^y+4^y=5^y$ propun urmatoarea ecuatie:
fie a,b,c,d,e numere reale nenule astfel incat a>b>c>d>e si a+b=c+d+e.
Rezolvati in R ecuatia:
$a^y+b^y=c^y+d^y+e^y$.

Prof. Buga Viorel

❖ Soluţie

Din ecuatia initiala impartind prin c^y obtinem:

$(a/c)^y+(b/c)^y=1+(d/c)^y+(e/c)^y$
$a/c<1$, $b/c<1$ rezulta ca functia $f(x)=(a/c)^y+(b/c)^y$ este descrescatoare
$d/c>1$, $e/c>1$ rezulta ca functia $g(x)=1+(d/c)^y+(e/c)^y$ este crescatoare
Atunci ecuatia $f(x)=g(x)$ are solutie unica $x=1$.

10.21) Arătați că: $(1+\sin x)^{2016}+(1-\sin x)^{2016}\le 2^{2016}$, pentru orice număr real x.

Valentina și Liviu Radu, Tulcea

❖ Soluţie

$$(1+\sin x)^{2016}+(1-\sin x)^{2016}=2C_{2016}^0+2C_{2016}^2\sin^2 x+2C_{2016}^4\sin^4 x+\ldots+2C_{2016}^{2016}\sin^{2016} x\le$$
$$\le 2(C_{2016}^0+C_{2016}^2+C_{2016}^4+\ldots+C_{2016}^{2016})=2\cdot 2^{2016-1}=2^{2016}.$$

10.22) Rezolvati in numere naturale: $5^x=1+2^y$

❖ Soluţie
Daca x este numar par. $x=2n$, n natural atunci ecuatia devine $5^{2n}-1=2^y$ sau $(5^x-1)(5^{2n-2}+5^{2n-4}+\ldots+5^2+1)=2^y$ imposibil, deoarece membrul stang este divizibil cu 3.
Daca x este numar impar $x=2n+1$, n natural obtinem: $5^{2n+1}-1=2^y$ sau $4(5^{2n}+5^{2n-1}+\ldots+5+1)=2^y$. Daca $n\ge 1$, egalitatea precedenta nu este posibila deoarece $5^{2n}+5^{2n-1}+\ldots+5+1$ este numar imapar mai mare decat 3. Ramane deci $n=0$ adica $y=2$ si atunci $x=1$.

10.23) Rezolvati ecuatia: $[(x^3+3x^2+2x+1)/3]+x=23$

❖ Soluţie
Avem $x^3+3x^2+2x+1=x(x+1)(x+2)$ si deci $(x^3+3x^2+2x+1)/3=x(x+1)(x+2)/3+1/3$
Din ecuatia data se observa ca x este numar intreg si atunci $x(x+1)(x+2)/3$ este numar intreg si cum $[(x^3+3x^2+2x+1)/3]= x(x+1)(x+2)/3$ ecuatia devine $x(x+1)(x+2)/3+x=23$ rezulta usor $x=3$.

10.24) Rezolvati in R ecuatia: $x^4+x^2+\sqrt{2}\,x+2=0$

❖ Soluţie
Ecuatia se poate scrie simplu : $x^4+(x+\sqrt{2}/2)^2+3/2=0$ Conculuzia este clara.

10.25) Fie functiile $f,g:[0,n]\to R$ cu proprietatiile:
$f(n-k)=f(k)$ si $g(n-k)=-g(k)$, unde $k\in\{0,1,2...n\}$.
Sa se arate ca $\sum_{k=0}^{n} f(k)g(k)=0$.

❖ Soluţie
Fie $S=\sum_{k=0}^{n} f(k)g(k)$. Deoarece $f(n-k)=f(k)$ si $g(n-k)=-g(k)$,

avem $\sum_{k=0}^{n} f(n-k)g(n-k)$=-S insa n-k∈[0,n]
deci $\sum_{k=0}^{n} f(n-k)g(n-k) = S$ Din S=-S avem S=0.

10.26) Fie a ∈R si f:R→R astfel incat:
1° f(f(x))=4x+3 oricare x∈R
2° f(f(f(x)))=8x+a oricare x∈R.
a) Sa se determine a∈R si functia de gr.I care verifica conditiile 1° si 2°.
b) Sa se arate ca singura functie f : R→R care verifica 1° si 2° este functia determinata la punctul a).

❖ Soluţie

a) Fie f(x)=mx+n rezulta ca f(f(x)) = f(mx+n) = m²x+mn+n
b) Analog f(f(f(x)))=m³x+m²n+mn+n
Rezulta: m³x+m²n+mn+n=8x+a si m²x+mn+n=4x+3 oricare x∈R
Rezulta m²= 4, mn+n=3, m³=8 si m²x+mn+n=a
Rezulta valorile : m=2, n=1 si a=7 deci f(x)=2x+1.
Din f(f(f(x)))=8x+a tinand cont ca f(f(x))=4x+3 rezulta f(4x+3)=8x+a oricare ar fi x real, rezulta f(4x+3)=2(4x+3)+a-6, rezulta f(x)=2x+a-6 oricare ar fi x real , f este de gradul 1 rezulta unicitatea.
Dar f(f(f(x))=4f(x)+3=8x+a oricare ar fi x real , rezulta f(x)=2x+(a-3)/4 oricare x real deci a-6= (a-3)/4 → a→7
Rezulta ca singura functie care verifica conditiile este f : R→R , f(x)=2x+1.

10.27) Fie f : R→R o functie care admite drept perioada orice numar irational.Sa se arate ca f este constanta.

❖ Soluţie
Fie a∈R-Q fixat si b=f(a)
Oricare ar fi x∈R-Q avem f(x+a)=f(a) , iar pe de alta parte f(x+a)=f(x) deoarece x si a sunt perioade pentru f.
Deci f(x)=f(a) =b
Daca x∈Q , atunci x+√2 ∈R-Q si deci f(x)=f(x+√2)=b
Decif(x)=b pentru orice x ∈ R.

10.28) Fie f : R→R o functie periodica si monotona.
Atunci f este constanta.

❖ Soluţie
Deoarece f este periodica , exista T>0 astfel incat f(x+T)=f(x) oricare x real.
Presupunem ca f este crescatoare, atunci f(0)≤f(x)≤f(T) oricare x∈[0;T]
Dar cum f(0)=f(T) → f(x)=f(0) oricare x∈[0;T].
Deci f(x)=f(0) oricare x∈R.

Problemele 10.22-10.28 au fost selectate de prof. **Buga Viorel**

Clasa a XI-a

11.20) Pentru o permutare $\varphi \in S_n$ se notează $S_n(\varphi)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\varphi(k)}$.

Să se arate că $S_n(\varphi)$ este minimă dacă φ este permutarea identică și apoi să se calculeze $\lim_{n\to\infty} S_n(\varphi)$.

❖ Soluţie

Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz obținem:

$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\varphi(k)}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\geq\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\varphi(k)}}\right)^2$. Dar $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\varphi(k)}}$ datorită bijectivității lui φ.

Deci $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\varphi(k)}\geq\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$. Deci minim de $S_n(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$ și se realizează când în inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz are loc egalitatea, adică $\varphi(k)=\mathrm{k}$.

Deoarece $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ și $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k}=\infty$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} S_n(\varphi)=\infty$.

11.21) Fie A și B două matrice pătratice cu elemente reale.
Arătați că $Tr\left[\left(\alpha\cdot A^n+\beta\cdot B^n\right)\cdot\left(A\cdot B-B\cdot A\right)\right]=0, \forall n\in \boldsymbol{N}^*, \forall \alpha,\beta\in \boldsymbol{R}$.

❖ Soluţie

Folosim proprietățile: $Tr(X\cdot Y)=Tr(Y\cdot X)$ și
$Tr(\alpha\cdot X+\beta\cdot Y)=\alpha\cdot Tr(X)+\beta\cdot Tr(Y), \forall X,Y\in M_p(\boldsymbol{R})$.
Avem:
$Tr\left[A^n\cdot(A\cdot B-B\cdot A)\right]=Tr\left[A^{n+1}\cdot B-A^n\cdot B\cdot A\right]=Tr\left(A^{n+1}\cdot B\right)-Tr\left(A^n\cdot B\cdot A\right)=Tr\left(A^{n+1}\cdot B\right)-Tr\left(B\cdot A^{n+1}\right)=0.$

Înlocuind pe A cu B obținem $Tr\left[B^n\cdot(B\cdot A-A\cdot B)\right]=0=-Tr\left[B^n\cdot(A\cdot B-B\cdot A)\right]$ de unde
$Tr\left[B^n\cdot(B\cdot A-A\cdot B)\right]=0.$
În final: $Tr\left[\left(\alpha\cdot A^n+\beta\cdot B^n\right)\cdot(A\cdot B-B\cdot A)\right]=Tr\left[\alpha\cdot A^n\cdot(A\cdot B-B\cdot A)+\beta\cdot B^n\cdot(A\cdot B-B\cdot A)\right]=$
$=\alpha\cdot Tr\left[A^n\cdot(A\cdot B-B\cdot A)\right]+\beta\cdot Tr\left[B^n\cdot(A\cdot B-B\cdot A)\right]=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0.$

11.22) Fie $A,B\in M_n(\boldsymbol{R})$, astfel încât matricea B are toate elementele egale cu x. Să se arate că: $\det(A+B)\cdot\det(A-B)\leq(\det(A))^2$.

❖ Soluţie

Se observă că $\det(A+B)=\det(A)+x\cdot u$, iar $\det(A-B)=\det(A)-x\cdot u$. Se obține:

$\det(A+B)\cdot\det(A-B)=\left[\det(A)\right]^2-x^2\cdot u^2\le\left[\det(A)\right]^2$.

11.23) Să se arate că: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n}k^e}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n}k^\pi}$.

❖ Soluţie

Fie $x_n=\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n}k^a}, n\in\boldsymbol{N}^*, a\in\boldsymbol{R}_+^*$. Este evident că $1<x_n<\left(\sqrt[n]{n}\right)^{a+1}$, de unde $1\le\lim\limits_{n\to\infty}x_n\le 1$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. Pentru $a=e$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n}k^e}=1$, iar pentru $a=\pi$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n}k^\pi}=1$.

11.24) Considerăm şirul de numere reale $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n=a^{1+\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt3}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}-a^{1+\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt3}+\ldots+\frac{1}{\sqrt n}}, a\in(0,\infty)\setminus\{1\}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Petre Gutescu

❖ Soluţie

Presupunem cunoscut că şirul $(s_n)_{n\ge1}$, $s_n=1+\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt3}+\ldots+\frac{1}{\sqrt n}-2\sqrt n$ este convergent (şirul lui A.G. Ioachimescu) şi notăm $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$ (1).

Avem: $x_n=a^{1+\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt3}+\ldots+\frac{1}{\sqrt n}}\cdot\left(a^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}-1\right)=a^{1+\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt3}+\ldots+\frac{1}{\sqrt n}-2\sqrt n}\cdot\frac{a^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\cdot\frac{\sqrt n}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\left(a^2\right)^{\sqrt n}}{\sqrt n}, n\ge1$ (2).

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}a^{1+\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt3}+\ldots+\frac{1}{\sqrt n}-2\sqrt n}\overset{(1)}{=}a^s$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}=\ln a$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt n}{\sqrt{n+1}}=1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(a^2\right)^{\sqrt n}}{\sqrt n}=\begin{cases}0, & a\in(0,1)\\ \infty, & a\in(1,\infty)\end{cases}$,

obţinem, folosind (2), că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}0, & a\in(0,1)\\ \infty, & a\in(1,\infty)\end{cases}$.

11.25) Să se determine $a\in\boldsymbol{R}$ astfel încât şirul $(x_n)_{n\ge2}, x_n=\sqrt[n+3]{(n+3)!}+\sqrt[n+2]{(n+2)!}+\sqrt[n+1]{(n+1)!}+a\sqrt[n]{n!}$ să fie convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

❖ Soluţie

Presupunem cunoscut că şirul $(L_n)_{n\ge2}$, $L_n=\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}$ este convergent (şirul lui Traian Lalescu) şi $\lim\limits_{n\to\infty}L_n=\frac{1}{e}$ (1).

Dacă $a\ge0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$. Deci este necesar ca $a<0$. Prin urmare

$x_n=\left(\sqrt[n+3]{(n+3)!}-\sqrt[n]{n!}\right)+\left(\sqrt[n+2]{(n+2)!}-\sqrt[n]{n!}\right)+\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)+(a+3)\sqrt[n]{n!}=$

$=L_{n+2}-L_{n+1}+L_n+L_{n+1}-L_n+L_n+(a+3)\sqrt[n]{n!}=L_{n+2}+L_n+(a+3)\sqrt[n]{n!},$ de unde:

$(x_n)_{n\geq 2}$ convergent $\Leftrightarrow a=-3$ și $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{e}$.

11.26) Fie șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ de numere reale date astfel: $1<a_1<b_1, a_n=\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$,

$b_n=\frac{b_{n-1}-1}{a_{n-1}-1}, \forall n\geq 2.$

Determinați valorile lui a_1 și b_1 pentru care ambele șiruri sunt convergente.

❖ Soluţie

Prin calcul găsim $a_1=a_6, b_1=b_6$, deci ambele șiruri sunt periodice. Șirurile sunt convergente dacă și numai dacă $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5$ și $b_1=b_2=b_3=b_4=b_5$. Vom avea $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a_1$ și $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b_1$.

Fie $a_n=x$ și $b_n=y, \forall n\geq 1$; va trebui să avem $x=\frac{y}{x}$ și $y=\frac{y-1}{x-1}$ de unde, înlocuind,

obținem $x^2=\frac{x^2-1}{x-1}\Leftrightarrow x^2=x+1\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ și cum

$x>1\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

11.27) Dacă $(x)_{n\geq 1}$ este un șir de numere reale astfel încât există

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+3}-3x_{n+2}+3x_{n+1}-x_n\right)=x\in\overline{\boldsymbol{R}}$, să se arate că există și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^3}$.

❖ Soluţie

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{3n^2+3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}{6(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(x_{n+3}-3x_{n+2}+3x_{n+1}-x_n\right)=\frac{x}{6}$ și deoarece ultima limită există, din Lema Stolz-Cesaro rezultă existența tuturor limitelor anterioare.

Probleme propuse și selectate de prof. **Petre Gușescu**

Clasa a XII – a

12.19) Fie A o submulțime a mulțimii numerelor complexe, având proprietățile:
1) $\forall z \in \boldsymbol{C}, |z|=1 \Rightarrow z \in A$.
2) A este parte stabilă a lui $\boldsymbol{C}$ față de adunare.
Să se demonstreze că $A=\boldsymbol{C}$.

❖ Soluţie

I) Arătăm mai întâi că discul-unitate este inclus în A. Din 1) avem $1 \in A, -1 \in A$ și atunci $1+(-1)=0 \in A$. Fie acum $z \in \boldsymbol{C}$ cu $0<|z|<1$. Considerăm în planul complex punctele $M(z)$ și $N(z/2)$ (deci N este mijlocul segmentului $[OM]$). Perpendiculara în N pe OM intersectează cercul-unitate în punctele $M_1(z_1), M_2(z_2)$. Deoarece OM_1MM_2 este romb, rezultă $z=z_1+z_2$. Cum $z_1, z_2 \in A$ (conform 1)), rezultă $z \in A$ (conform 2)).
II) Arătăm că și „coroana circulară" $1<|z|\le 2$ este inclusă în A. Fie $z \in \boldsymbol{C}$ cu $1<|z|\le 2$. Considerăm în plan punctele $P(z)$ și $Q(z/2)$ (deci Q este mijlocul lui $[OP]$). Deoarece $OP \le 2$, rezultă $OQ \le 1$, deci Q aparține discului-unitate și atunci perpendiculara în Q pe OP taie cercul-unitate în punctele
$P_1(z_1), P_2(z_2)$. Rezultă că OP_1PP_2 este romb, deci $z=z_1+z_2$. Dar $z_1, z_2 \in A$ (conform 1)) și atunci
$z \in A$ (conform 2)).
III) Analog (prin inducție matematică) se arată că și „coroanele circulare"
$2<|z|\le 2^2$, $2^2<|z|\le 2^3$,...,$2^n<|z|\le 2^{n+1}$,... sunt incluse în A. Rezultă $A=\boldsymbol{C}$.

12.20) Fie $(G,\cdot)$ un grup și $x, y \in G$. Dacă există $\alpha, \beta \in \boldsymbol{Z}, \alpha, \beta$ relativ prime, astfel ca $xy^\alpha = y^\alpha x$ și $xy^\beta = y^\beta x$, atunci $xy = yx$.

❖ Soluţie

Deoarece x comută cu y^α, rezultă că x comută cu orice putere întreagă a elementului y^α, adică $xy^{n\alpha} = y^{n\alpha}$, pentru orice $n \in \boldsymbol{Z}$. Analog $xy^{n\beta} = y^{n\beta}$, $\forall n \in \boldsymbol{Z}$.
Cum α și β sunt relativ prime, există $p, q \in \boldsymbol{Z}$ astfel încât $p\alpha + q\beta = 1$. Atunci putem scrie:
$$xy = xy^{p\alpha+q\beta} = \left(xy^{p\alpha}\right)y^{q\beta} = y^{p\alpha}\left(xy^{q\beta}\right) = y^{p\alpha}\left(y^{q\beta}x\right) = y^{p\alpha+q\beta}x = yx.$$

12.21) Fie G un grup cu proprietatea următoare: G se poate scrie ca reuniunea a trei subgrupuri diferite de G, dintre care două au câte două elemente. Să se arate că G este izomorf cu grupul lui Klein.

❖ Soluţie

Fie $G = H \cup K \cup L$, unde H și K au câte două elemente fiecare. Să notăm $H=\{e,a\}$, $K=\{e,b\}$, e fiind elementul neutru din grupul G. Fie $x \in L \setminus \{e\}$ arbitrar.
Observăm că $H \cap L$ este un subgrup al lui H, diferit de H, căci dacă $H \cap L = H$, rezultă $H \subset L$ și atunci $G = K \cup L$, ceea ce nu se poate (un grup nu se scrie ca reuniune de două

subgrupuri proprii).
Deci $H \cap L = \{e\}$. Să considerăm elementul $y = ax \in G$. Dacă am avea $y \in H$, ar însemna că
$x = a^{-1}y = ay \in H \cap L$, deci $x = e$, contradicție cu alegerea lui x. Dacă am avea $y \in L$, atunci $a = yx^{-1} \in L$, deci $H \subset L$, care am văzut că duce la contradicția $G = H \cup L$.
Rezultă în mod necesar $y \in K$, deci $y = e$ sau $y = b$. Dacă am avea $y = e$, ar însemna că $ax = e$, deci
$x = a^{-1} = a \in H \cap L$, deci $x = e$, contradicție.
Rezultă drept unică posibilitate $y = b$, adică $ax = b$, deci $x = a^{-1}b = ab$. Dar x a fost luat arbitrar în $L \setminus \{e\} = \{ab\}$, adică $L = \{e, c\}$, unde $c = ab$.
Rezultă $G = \{e, a, b, c\}$. Elementele a, b, c generează respectiv câte un subgrup ciclic de ordinul doi și anume H, K, L, deci $a^2 = b^2 = c^2 = e$. Aceasta arată că suntem în cazul unui grup cu patru elemente,
care nu este ciclic, deci este izomorf cu grupul lui Klein.

12.22) Se consideră funcțiile $f_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, n \in \boldsymbol{N}^*$,

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^{n-1} \cdot \sin\frac{1}{x} - x^{n-2} \cdot \cos\frac{1}{x}, & x \in (-\infty, 0) \\ 0, \ x = 0 \\ 2x \cdot \cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}.$$

Să se arate că f_1 nu admite primitive, iar f_n admite primitive pentru orice $n \geq 2$.

❖ Soluţie

Se observă că $g_n : (-\infty, 0) \to \boldsymbol{R}$, $g_n(x) = x^n \sin\frac{1}{x}$ este o primitivă pe $(-\infty, 0)$ a lui f_n, iar $h_n : (0, +\infty) \to \boldsymbol{R}$, $h_n(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$ este o primitivă a lui f_n pe $(0, +\infty)$. Funcția $F_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$,

$F_n(x) = \begin{cases} g_n(x), & x \in (-\infty, 0) \\ 0, & x = 0 \\ h_n(x), & \in (0, +\infty) \end{cases}$ va fi o primitivă a lui f_n pentru orice $n \geq 2$.

Într-adevăr, $F'_{n,s}(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{F_n(x) - F_n(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{g_n(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} x^{n-1} \sin\frac{1}{x} = \begin{cases} 0, \ n \geq 2 \\ nu \ exist\check{a}, n = 1 \end{cases}$.

La fel $F'_{n,d}(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{F_n(x) - F_n(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{h_n(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x^2 \cos\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(x \cos\frac{1}{x} \right) = 0.$
Prin urmare, dacă $n \geq 2$, $F'_n(x) = f_n(x)$, ceea ce arată că f_n admite primitive pentru $n \geq 2$.
Dacă $n = 1$, atunci f nu admite primitive deoarece F_1 nu este derivabilă în $x_0 = 0$.

12.23) Fie $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ cu proprietatea că funcțiile

$g,h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, g(x)=(x+1)\cdot f(x),\ h(x)=x\cdot f(x+1)$
admit primitive pe $\boldsymbol{R}$. Să se arate că f admite primitive pe $\boldsymbol{R}$.

❖ Soluţie

Deoarece h admite primitive rezultă că funcția $k:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, k(x)=h(x-1)=(x-1)f(x)$ admite primitive pe $\boldsymbol{R}$. Deci $g(x)=xf(x)+f(x),\ k(x)=xf(x)-f(x),\ x\in\boldsymbol{R},$ de unde deducem că $f(x)=\frac{1}{2}(g(x)-k(x)),\ x\in\boldsymbol{R}\Leftrightarrow f=\frac{1}{2}(g-k),$ ceea ce arată că f admite primitive.

12.24) Să se calculeze $\int\frac{3\sin x+x^2-2x}{e^x+3(\sin x+\cos x)+2x^2}dx,$ unde $x\in I\subset\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$

❖ Soluţie

Fie $f:I\to\boldsymbol{R},\ f(x)=e^x+3(\sin x+\cos x)+2x^2$ cu $f'(x)=e^x+3(\cos x-\sin x)+2x.$ Avem: $f(x)-f'(x)=2(3\sin x+x^2-2x).$ Rezultă că:

$$\int\frac{3\sin x+x^2-2x}{f(x)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{f(x)-f'(x)}{f(x)}dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|f(x)|+C=$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln\left(e^x+3(\sin x+\cos x)+2x^2\right)+C.$$

12.25) Să se calculeze $\int\frac{\sin 2x+3\sin x+5\cos x+5}{2+\sin x+\cos x}dx,\ x\in\boldsymbol{R}.$

❖ Soluţie

Considerăm $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=2+\sin x+\cos x$ cu $f'(x)=\cos x-\sin x$ și atunci

$$\frac{\sin 2x+3\sin x+5\cos x+5}{2+\sin x+\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x+2)^2+\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x+2}=\frac{f^2(x)+f'(x)}{f(x)}=f(x)+\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Deducem că

$$\int\frac{\sin 2x+3\sin x+5\cos x+5}{2+\sin x+\cos x}dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx+\int f(x)dx=\ln|f(x)|+\int(2+\sin x+\cos x)dx=$$

$$=2x-\cos x+\sin x+\ln(2+\sin x+\cos x)+C.$$

12.26) Să se calculeze $\int\frac{x^{2017}-1}{(x-1)(x^{2018}-1)}dx,$ unde $x\in(1,\infty).$

Petre Gutescu

❖ Soluţie

$$\int \frac{x^{2017}-1}{(x-1)\left(x^{2018}-1\right)}dx=\int \frac{1}{x}\cdot\frac{\left(x^{2018}-1\right)-(x-1)}{(x-1)\left(x^{2018}-1\right)}dx=\int \frac{1}{x(x-1)}dx-\int \frac{1}{x\left(x^{2018}-1\right)}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx-$$

$$-\int \frac{x^{2017}}{x^{2018}\left(x^{2018}-1\right)}dx=\ln(x-1)-\ln x-\int\left(\frac{x^{2017}}{x^{2018}-1}-\frac{1}{x}\right)dx=\ln(x-1)-\ln x-\frac{1}{2018}\ln\left(x^{2018}-1\right)+\ln x+C=$$

$$=\ln(x-1)-\frac{1}{2018}\ln\left(x^{2018}-1\right)+C.$$

Probleme propuse și selectate de prof. **Petre Gușescu**