CLASA a V a

5.33) Un croitor are zece bucăți de material.El decide să taie câteva din aceste bucăți în zece bucăți fiecare. El taie apoi o parte din piesele rezultate în zece bucăți fiecare. Apoi taie cateva din aceste bucati rezultate in zece bucati fiecare.... Continuă în acest fel până când în cele din urmă obosește și se oprește. Numără bucățile de pânză pe care le are acum şi după câteva ore determină că acest număr este 1984. Arătaţi că a numărat greşit.

5.34) Douăzeci și cinci de echipe de fotbal sunt înscrise într-un turneu. Arătați că la sfârșitul celei de-a patra zile a turneului cel puțin una dintre echipe a jucat un număr par de jocuri.

5.35) Vi se oferă 80 de monede. Șaptezeci și nouă dintre aceste monede sunt identice în greutate, în timp ce una este falsă şi mai grea. Folosind doar o balanţă, aflaţi o metodă de identificare a monedei contrafăcute utilizând doar patru cântăriri. O balanţă este un dispozitiv compus din două talere suspendate de la un braț. Prin plasarea unui set de monede pe fiecare taler, se poate determina care set de monede are o greutate mai mare, dar nu se poate determina cu cat mai mult.

5.36) Arătaţi că, dintre 12 numere de doua cifre, exista două a căror diferență este un număr compus din două cifre identice.

5.37) Fie $\overline{abcdef}$ un număr întreg de 6 cifre, astfel încât $\overline{defabc}$ este de 6 ori valoarea $\overline{abcdef}$. Găsiți valoarea a + b + c + d + e + f.

5.38) Dacă $\overline{abc}$ este un multiplu de 37, atunci la fel este si numarul $\overline{bca}$.

5.39) Care este cifra unităților numărului $3^{1999}\ 7^{2000}\ 17^{2001}$?.

5.40) Într-un coș sunt 5 mere, 8 pere și 11 portocale. In fiecare zi Alice mănâncă două fructe diferite. Se poate întâmpla ca într-o zi să fie același număr de mere, pere și portocale rămase în coș?

5.41) Care este cel mai mare factor prim al numarului 9^{18}-3^{32}

5.42) Să se arate că fracția $\frac{100^{101}+101^{100}}{100^{100}+101^{101}}$ este subunitară

Probleme propuse și selectate de prof. **Muscalu Adrian**

CLASA a VI a

6.34) Să se afle numerele naturale de trei cifre $\overline{xyz}$ cu proprietatea că $\frac{57}{x^2+2y^2+3z^2}$ este un număr natural.

6.35) Ana, Mircea și George au rezolvat împreună tema de vacanță. George a rezolvat cu două mai multe probleme decât Mircea. Triplul numărul problemelor rezolvate de Mircea este cu patru mai mică decât numărul problemelor rezolvate de Ana. Suma numerelor problemelor rezolvate de Mircea și George este cu cinci mai mică decât numărul problemelor rezolvate de Ana.

6.36) Fie triunghiul ABC, cu AB < AC, se consideră $[AD$ bisectoarea interioară a < BAC, unde D ∈ $[BC]$, iar $[AE$ bisectoarea exterioară a < BAC, unde E ∈ BC. Se consideră F aparținând semidreptei opuse, semidreptei $[AE$, cu proprietatea că $[AE] \equiv [AF]$ și G intersecția dreptelor AC și DF. Să se arate că $[BE] \equiv [GF]$.

6.37) Să se determine numerele întregi x și y știind că diferența dintre produsul și suma lor este 2017.

6.38) Să se determine numerele de forma A= $\overline{3a1b5c}$ care să fie divizibile cu 3, 4 și 11.

6.39) Să se afle numerele care îndeplinesc simultan condițiile. Diferența dintre primul număr și suma dintre numerele al doilea și dublul celui de al treilea este zero. Diferența dintre primul număr și triplul celui de al doilea este patru. Diferența dintre al treilea număr și al doilea număr este doi.

6.40) Să se calculeze raportul $\frac{2018a+2019b}{2018c+2019d}$, știind că $\frac{2000a+3b}{7a+2017b} = \frac{2000c+3d}{7c+2017d}$, iar numerele b și d sunt invers proporționale cu numerele 101 și 102.

6.41) Fie pătratul ABCD pe care se construiește în exterior triunghiul echilateral CED și fie EM perpendiculară pe DE, unde M aparține dreptei AB. Să se arate că

a) $[AM] \equiv [EM]$

b) $[EF] \equiv \frac{[AE]}{2}$, unde F este piciorul perpendicularei din E pe semidreapta $[AC$.

c) $[EC] \equiv [EN]$, unde $\{N\} = EM \cap AC$.

6.42)

a) Demonstrați că pentru orice n natural numărul $5^{2n+3} \cdot 4^{2n+3} + 2^{2n+1} \cdot 10^{2n+3}$ este pătrat perfect.

b) Arătați că numărul a = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + … + 2^{2019} este multiplu de 14.

6.43) Să se afle toate numerele de patru cifre care se pot scrie cu a, b, c, d, unde:

$a = 81^{2^3} : 243^6 + 2010^{2019^{0^{1485}}} - 2019$

$b = 15 - 11 \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3}}}}$

$c = (2^{2018} - 2^{2017} - 2^{2016}) : 16^{504}$

$d = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{10302}\right) : (1 + 2 + 3 + \cdots + 101) \cdot 10404.$

Probleme propuse și selectate de prof. **Ftadeev-Brad Adriana-Floriana**

CLASA a VII a

7.34) Într-un pătrat de latură 60 cm se consideră 121 de puncte distincte. Arătați că , printer acestea ,există trei puncte cu proprietatea că aria triunghiului determinat de ele este cel mult egală cu 30.

7.35) Fie ABCD un paralelogram cu m(∢DAB)< 90^0.Construim BE ⊥ AD,(E∈(AD)), DF⊥AB, (F∈(AB)) și $\{H\}$=BE∩DF.Dacă B_1 ∈(HB astfel încât $[HB_1] \equiv [AD]$și D_1 ∈(HD astfel încât $[HD_1] \equiv [AB]$, se cere:

a) Arătați că $[B_1D_1] \equiv [AC]$

b) Demonstrați că AC⊥ B_1D_1.

7.36) Determinați suma numerelor $\overline{ab}$, știind că $\sqrt{\overline{ab} + \overline{ba} + 4}$ este număr natural.

7.37) Se dă △ABC și punctul D∈(BC). Paralela prin D la AB intersectează pe AC în punctul E ,iar paralela prin D la AC intersectează pe AB intersectează pe AB în punctul F.

a) Arătați că DF+FA=AE+ED.

b) Demonstrați că raportul ariilor △ BDF și △ADF este egal cu inversul raportului ariilor △CDE și △AED.

7.38) Arătați că dacă x,y ∈ R^* astfel încât 5x^3+2x^2y=2y^3+5xy^2, atunci $\frac{3x+4y}{4x+3y} \in Z$.

7.39) Calculați suma primelor 30 zecimale ale numărului $(3-2\sqrt{2})^{100}$.

7.40) Fie ABC un triunghi cu AB≠AC. Notăm cu M,N,P mijloacele laturilor BC, CA, respective AB și cu D piciorul înălțimii din A. Demonstrați că patrulaterul cu vârfurile în punctele D,M,Nși P este trapez isoscel. Ce se întâmplă în cazul în care AB=AC?

7.41)

a) Arătați că există cel puțin un număr natural n astfel încât $10^{29}<2^n<10^{30}$

b)Numărul 2^m se scrie cu 30 de cifre. Arătați că există o cifră care se repetă de cel puțin patru ori în scrierea lui 2^m.

7.42) Fie trapezul ABCD,cu bazele AB=7 cm și CD=1 cm. Fie M∈(AD), N∈ (BC) astfel încât MN∥AB, iar patrulaterele ABNM și MNCD au arii egale. Calculați MN.

7.43) Determinați k ∈Z pentru care numărul N =$\frac{\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{k+1}$ este întreg.

Probleme propuse și selectate de prof. **Căpriță Doru-Marian**

CLASA a VIII a

8.33) Pentru numerele reale strict positive a_1, a_2,..., a_n, unde n∈ N^*,să se arate că:

$\frac{a_1^2+4a_1+5}{a_1+2}+\frac{a_2^2+4a_2+5}{a_2+2}+...+\frac{a_n^2+4a_n+5}{a_n+2}>2$.

8.34) Rezolvați în R ecuația: $\sqrt{x+\sqrt{4x-3}+\frac{1}{4}}+\sqrt{x-\sqrt{4x-3}+\frac{1}{4}}=\frac{3x-1}{4}$

8.35) Calculați: $\frac{1^2}{1^4+1}+\frac{2^2-1}{1^4+2}+\frac{3^2-2}{3^4+3}+...+\frac{2018^2-2017}{2018^4+2018}$.

8.36) Fie $[AB]$și $[CD]$ două segmente necoplanare,iar M și N mijloacele lor. Să se demonstreze că MN <$\frac{AD+BC}{2}$.

8.37) În cubul ABCD$A'B'C'D'$ *notăm cu* Hpiciorul perpendicularei din B pe planul AB'C și cu I intersecția dreptelor D'O și $B'D$,unde O este ortocentrul pătratului ABCD. Aflați măsura unghiului plan corespunzător unghiului diedru format de planele HIC' și ACA'.

8.38) Se consideră două segmente oarecare în spațiu, $[AB]$și $[CD]$,astfel încât să aibă loc egalitatea $\frac{CA}{CB}+\frac{CB}{CA}+\frac{DA}{DB}+\frac{DB}{DA}$=4. Demonstrați că AB⊥CD.

8.39) Dacă a+$\frac{1}{a}$=5, a∈R*,să se calculeze valoarea expresiei:

$$E(a)=\frac{a}{1+a^2}+\frac{a^2}{1+a^4}+\frac{a^3}{1+a^6}.$$

8.40) Se dă ecuația :$\frac{x(x-1)(x-3)(x-4)}{x^2-4x+8}$=a.

a)Să se determine a∈R astfel încât ecuația să aibă o singură rădăcină întreagă.

b) Să se determine a∈R astfel încât ecuația să aibă o singură rădăcină reală.

8.41) Se consideră un cub cu muchia de lungime 1. Să se arate că tetraedrul cu vârfurile în mulțimea vârfurilor cubului are volumul $\frac{1}{6}$ daca și numai dacă trei din vârfurile tetraedrului sunt vârfuri ale unei fețe a cubului.

8.42) Câte elemente are mulțimea A=$\left\{x \in Z \mid \frac{x^5+x^3+x^2-1}{x^2+1} \in Z\right\}$?

Probleme propuse și selectate de prof. **Căpriță Doru-Marian**