CLASA a IX – a

9.32) Arătați că numărul 11^{4n+1}-9·22^{2n}-24^{n+1}:1521,∀n∈N^*.

9.33) Fie x,y∈(0,∞) care satisfac inegalitățile: x≥$\frac{1}{4}$+xy și y≥$\frac{1}{4}$+xy. Arătați că x=y.

9.34) Fie a∈R.Determinați toate numerele x,y∈Z^*care au proprietatea că $4^x+4^y=\frac{a^2+a+1}{a^1+1}$.

9.35) Fie a,b,c>0 astfel încât ab+bc+ca=1.Arătați că:

a) a+b+c≥3;

b) $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\geq\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}$

9.36) Rezolvați sistemul:$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1,2 \\ y+[z]+\{x\}=2,3 \\ z+[x]+\{y\}=3,5 \end{cases}$, unde x,y,z>0, iar$[a]$reprezintă partea întreagă a numărului a.

9.37) Fie A_1, B_1, C_1proiecțiile centrului de greutate G al triunghiului ABC pe laturile sale, de lungimi a,b,c.Arătați ca $a^2\cdot\overline{GA_1}+b^2\cdot\overline{GB_1}+c^2\cdot\overline{GC_1}=\overline{0}$

9.38) Găsiți locul geometric al punctelor M din planul triunghiului ABC,pentru care vectorul $\overline{MA}+2\overline{MB}+3\overline{MC}$ este paralel cu una din laturile triunghiului.

9.39) Se consideră triunghiul echilateral ABC și punctele M∈(BC),N∈(AC),P∈(AB), astfel încât vectorii $\overline{AM}, \overline{BN}, \overline{CP}$ să fie coliniari. Arătați că suma $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{BN^2}+\frac{1}{CP^2}$ este constantă.

9.40) Știind că patrulaterul ABCD este înscris într-in cerc și punctele H_1, H_2, H_3, H_4 sunt respective ortocentrele triunghiurilor ABC,BCD,CDA și DAB,arătați că patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este înscris într-un cerc.

9.41) Fie patrulaterul ABCD, H_1 ortocentrul triunghiului ABC și H_2 ortocentrul triunghiului DBC. Demonstrați că ABCD este inscriptibil dacă și numai dacă H_1H_2∥AD.

Probleme propuse și selectate de prof. Căpriță Doru Marian

CLASA a X – a

10.29) Sa se resolve ecuatia $(a^x+a^{-x})(1+x^2)=2$ unde a este strict pozitiv si x real oarecare.

10.30) Sa se rezolve ecuatia $(x+[x])^{1/2} + (x-\sqrt{x})^{1/2} =1$ unde[x] exte partea intreaga a lui x.

10.31) Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatia: $a^{x^2}+a^4=2a^{2x}$ unde a>1.

10.32) Rezolvati in numere natural: $5^x=1+2^y$.

10.33) Sa se rezolve ecuatia: $1+4^x+9^x =2^x+3^x+6^x$

10.34) Sa se determine a real, incat sistemul urmator sa aiba o singura solutie:

$2^x+2^{-x}+y=a$

$x^2+2^y=3-a$

10.35) Daca functiile f si g: R =>R sunt functii subaditive iar g este si crescatoare sa se demonstreze ca functia gof este subaditiva.

10.36) Fie f si g :A =>A cu proprietatile :

a) g este bijectiva
b) $fog^{-1}$of este functia identica. Sa se arate ca
   1) f este bijectiva
   2) fof=g
   3) fog=gof.

Probleme propuse și selectate de prof. Buga Viorel

CLASA a XI – a

11.28) a) Fie $A,B,C,D\in \mathrm{M}_n(\mathrm{C})$ cu proprietatea că $X+Y=XY$ pentru orice $X,Y\in\{A,B,C,D\}$. Să se arate că $2(A+B+C+D)=ABCD.$

b) Fie $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\1&0&3\end{pmatrix}$. Să se rezolve , în mulțimea $\mathrm{M}_3(\mathrm{R})$, ecuația $X^n=A,$ unde $n\in \mathrm{N}^*$ fixat.

11.29) Fie $A\in \mathrm{M}_n(\mathrm{C})$ și $A^m=(-1)^m\cdot I_n$ cu $m\in \mathrm{N}, m\geq 2,$ atunci:

$n\leq rang(I_n+A)+rang(I_n+\varepsilon\cdot A)+...+rang\left(I_n+\varepsilon^{m-1}\cdot A\right)\leq (m-1)n,$ unde

$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{m}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{m}.$

11.30) Fie $A,B,S\in \mathrm{M}_3(\mathrm{C}),S$ fiind o matrice nesingulară astfel încât $B=S^{-1}AS.$ Să se arate că:

$$tr\left(B^2\right)+2tr\left(B^*\right)=\left(tr\left(A\right)\right)^2.$$

11.31) Fie $A\in \mathrm{M}_4(\mathrm{R})$ astfel încât $\det\left(A^2-I_4\right)<0.$ Să se arate că există $\alpha\in \mathrm{R},|\alpha|<1$ astfel încât matricea $A+\alpha I_4$ să fie singulară.

11.32) Să se demonstreze că, dacă $a\in\left(0,2\sqrt{2}\right]$, atunci $|\ln a+a-1|\geq\sqrt{2}\cdot|a-1|.$

11.33) Fie $f,g:[a,b]\to \mathrm{R}\ (0<a<b)$ două funcții continue pe $[a,b]$ și derivabile pe $(a,b).$ Dacă g este strict crescătoare, atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât

$$\frac{2}{g(a)-g(c)}<\frac{f'(c)}{g'(c)}<\frac{2}{g(b)-g(c)}.$$

11.34) Se consideră funcția $f:[a,b]\to \mathrm{R}$ continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) și numerele reale $x_0,x_1,x_2,...,x_n$

astfel încât $a=x_0<x_1<...<x_n=b.$ Să se arate că există numerele reale $c_1,c_2,...c_n$, $c_i\in\left(x_{i-1},x_i\right),\ i\in\{1,2,...,n\}$,

astfel încât $\left(\sum_{i=1}^{n}f^2(c_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)^2\right)\geq\left(f(b)-f(a)\right)^2.$

Petre Gutescu

11.35) Să se arate că există un șir de numere reale $(x_n)_{n\geq0}$ cu

$x_n\in\left(\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{2}},\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2x_n\sin\frac{1}{x_n}-\cos\frac{1}{x_n}\right)=\frac{2}{\pi}.$

Probleme propuse și selectate de prof. Petre Gutescu

CLASA a XII – a

12.27) Fie $(A,+,\cdot)$ un inel și $p\in \mathrm{N},p>1$ astfel încât $\underbrace{1+1+...+1}_{p-ori}=0.$ Arătați că:

a) $\forall x\in A,\ p\cdot x=0$ unde $p\cdot x=\underbrace{x+x+...+x}_{p-ori};$

b) dacă p este prim și $a,b\in A$ cu $a\cdot b=b\cdot a,$ atunci $(a+b)^p=a^p+b^p;$

c) dacă $X=\begin{pmatrix}\hat{1} & a & \hat{b}\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_3(A)$, p prim și $p>2$, atunci $X^p=I_3$.

12.28) Fie A un inel finit în care numărul elementelor inversabile este egal cu numărul elementelor nilpotente.

Să se arate că numărul elementelor inelului este o putere a lui 2. ($x\in A$ este element *nilpotent* $\Leftrightarrow \exists n\in \mathrm{N}^*$ astfel încât $x^n=0$).

12.29) Arătați că dacă $x,y\in A$, unde $(A,+,\cdot)$ este un inel, și $x^r+y^r=(x+y)^r$ pentru orice $r\in\{2,3,5\}$, atunci

$x^n+y^n=(x+y)^n$, $\forall n\in 2\mathrm{N}+1$.

12.30) Se consideră corpul $(\mathrm{Z}_p,+,\cdot)$, unde p este un număr prim mai mare decît 5. Să se arate că pentru orice $\alpha\in \mathrm{Z}_p$, ecuația $x_1+(x_2)^2+...+(x_{p-1})^{p-1}=\alpha$, în necunoscutele $x_1,x_2,...,x_{p-1}$, admite o soluție $(a_1,a_2,...,a_{p-1})$ cu proprietatea că $a_i\notin\{\hat{0},\hat{1}\}$, $\forall i\in\{1,2,...,p-1\}$.

12.31) a) Pentru $a\in \mathrm{R}$ dat, determinați primitivele funcției $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, $f(x)=(x^3+4a^2x^2+3ax+2a)\cdot e^{ax^2}$.

b) Să se calculeze integrala: $\int(2x^{10}+3x^5)\sqrt[5]{x^5+3}dx$, $x\in\mathrm{R}$.

c) Să se determine funcția continuă $f:[0,1]\to\mathrm{R}$ care satisface identitatea:

$\int_0^1(2x^2-3f(x))f(x)dx=\frac{1}{15}$.

12.32) Se consideră $n\in\mathrm{N}$, $n\geq 3$ și funcțiile $f_i:[a,b]\to\to[c,\infty)$, $i\in\{1,2,...,n\}$, $c>0$, continue pe intervalul $[a,b]$.

Să se arate că, pentru orice $\sigma\in S_n$, avem inegalitatea:

$$\left(\int_a^b f_1(x)dx\right)\left(\int_a^b f_2(x)dx\right)...\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)\leq\left(\int_a^b\frac{f_1^2(x)}{f_{\sigma(1)}(x)}dx\right)\left(\int_a^b\frac{f_2^2(x)}{f_{\sigma(2)}(x)}dx\right)...\left(\int_a^b\frac{f_n^2(x)}{f_{\sigma(n)}(x)}dx\right).$$

12.33) Să se determine funcțiile continue $f,g:[0,1]\to\mathrm{R}$ care satisfac relația:

$$2\cdot\int_0^1 f(x)(2x-3f(x))dx+3\cdot\int_0^1 g(x)(x-2g(x))dx=\frac{25}{72}.$$

Petre Gutescu

12.34) Să se calculeze $\int_a^b \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{b}{x}}}{\sqrt{x}\sqrt{ab+x^2}}dx$, unde $0 < a < b$.

Probleme propuse și selectate de prof. Petre Gușescu