CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIŢIA a X-a, TULCEA, 21 aprilie 2018

Clasa a VII - a

1. Se consideră numerele reale *x*, *y* şi *z*, cel puţin două dintre ele fiind diferite. Arătaţi că $x+y+z=0$ dacă şi numai dacă $x^2+xy+y^2=y^2+yz+z^2=z^2+zx+x^2$.

2. În triunghiul *ABC* avem $AB=BC$, iar $D\in(BC)$ astfel încât $AD=AB$. Mediatoarea segmentului $[DC]$ intersectează bisectoarea unghiului ABD în ponctul *O*. Arătaţi că $OA=OI$, unde *I* este centrul cercului înscris în triunghiul *ABD*.

.

3. Numerele *m* şi *n* sunt naturale, mai mari decât 1. Calculaţi $m-n$ ştiind că numerele $\frac{m-1}{n}$ şi $\frac{n^2-1}{m}$ sunt simultan naturale.

4. Se consideră triunghiul ascuţitunghic *ABC*. Punctul *M* aparţine segmentului (AC), iar punctul *N* aparţine semidreptei $(MC$ astfel încât $[MN]\equiv[AC]$. Perpendiculara din *M* pe dreapta *BC* intersectează perpendiculara din *N* pe dreapta *AB* în punctul *K*. Paralela prin *K* la dreapta *AC* intersectează perpendiculara din *B* pe dreapta *AC* în punctul *H*.
Arătaţi că *H* este ortocentrul triunghiului *ABC*.

Notă: - Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
- Timp de lucru: 3 ore efectiv.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIŢIA A X-A, TULCEA, 21 aprilie 2018

Clasa a VIII – a

1. Determinaţi toate tripletele de numere naturale nenule (m,n,p) pentru care $mn+np+pm-mnp=2$.

2. Se consideră piramida patrulateră regulată *SABCD* în care $AB=1$ şi $SA=\sqrt{3}$. Punctele *M* şi *N* sunt mijloacele muchiilor $[SC]$, respectiv $[SB]$. Determinaţi măsura unghiului dintre dreptele *AN* şi *BM* .

3. Determinaţi numerele reale *a*, $a\geq 1$, pentru care există cel puţin un triplet de numere reale (x,y,z) care verifică inegalitatea $2x\sqrt{y-a}+2y\sqrt{z-a}+2z\sqrt{x-a}\geq xy+yz+zx$.

4. Se consideră triunghiul ascuţitunghic *ABC* în care *O* este centrul cercului circumscris. Punctele *D*, *E* şi *F* sunt situate pe segmentele (BC) , (AC) şi respectiv (AB) astfel încât $DE\perp OC$ şi $DF\perp OB$. Dacă *P* este centrul cercului circumscris triunghiului *AEF*, arătaţi că $PD\perp BC$.

Notă: - Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
- Timp de lucru: 3 ore efectiv.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ
"LAURENŢIU PANAITOPOL"
Tulcea. 21 Aprilie 2018

Clasa a 9-a

(1) Să se găsească cel mai mare element al mulţimii $\{\sin 1, \sin 2, \sin 3\}$.

(2) (a) Să se arate că $\left|x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$ pentru orice $x \in [0, 2]$.
(b) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funcţia definită prin $f(x) = x^2 + ax + b$. Să se arate că cel puţin una dintre inegalităţile $f(0) - f(1) \geq 1$ şi $f(2) - f(1) \geq 1$ este adevărată.
(c) Să se găsească cea mai mică valoare a lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât există numerele $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care inegalitatea $|x^2 + ax + b| \leq m$ este satisfăcută pentru orice $x \in [0, 2]$.

(3) Fie $a \in \mathbb{Z}$ un număr impar negativ fixat şi $(x_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $x_1 = a$ şi raţia $r \in \mathbb{Z}^*$. Definim mulţimea $M = \{n \in \mathbb{N}^* \mid |x_n - n| = 1\}$. Găsiţi toate valorile lui r pentru care mulţimea M are exact două elemente.

(4) Fie l şi m două drepte distincte concurente şi fie $M = \{\overrightarrow{v_i} \mid i = \overline{1, 2018}\}$ o mulţime de 2018 vectori având direcţiile paralele cu una dintre cele două drepte. Presupunem că $|\overrightarrow{v_i}| \neq |\overrightarrow{v_j}|$ pentru orice $i \neq j$. Dacă $|\overrightarrow{v_i}| \in \{1, 2, \ldots, 2018\}$, pentru orice $i = \overline{1, 2018}$, să se decidă dacă suma $\sum_{i=1}^{2018} \overrightarrow{v_i}$ poate fi egală cu $\overrightarrow{0}$.

Concursul de matematică ,,Laurenţiu Panaitopol"
Tulcea, 21 aprilie 2018

Clasa a 10-a

1. Rezolvaţi ecuaţia

$$\log_2(\log_2(1+\cos 4x)) + 2\sin x \sin 5x = 2^{2^{1+\cos 6x}}.$$

2. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea

$$e^{x+y} \leqslant f(x)f(y) \leqslant f(x+y),$$

oricare ar fi numerele reale x şi y.

3. Fie a, b numere complexe, astfel încât

$$|z^2 + az + b| \leq 1,$$

oricare ar fi numărul complex z cu $|z| \leq 1$. Arătaţi că $a = b = 0$.

4. Fie A o mulţime nevidă de numere reale şi $f : A \to A$ o funcţie bijectivă, astfel încât funcţia $g : A \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + f(x)$ este strict crescătoare.

a) Demonstraţi că, dacă mulţimea A este finită, atunci f este funcţia identică.

b) Daţi exemplu de mulţime A şi funcţie care îndeplineşte condiţiile din ipoteză, dar $f(x) \neq x$, oricare ar fi $x \in A$.

Concursul de Matematică "Laurenţiu Panaitopol"
Tulcea, 21 Aprilie 2018

Enunţuri, Clasa a XI-a

Problema 1. Arătaţi că pentru oricare matrici $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ există numere nenule a, b, c, astfel ca

$$\det(aA + bB + cC) = 0.$$

Problema 2. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{n}$ pentru $n \geq 1$.
a) Arătaţi că şirul are limita infinit;
b) Determinaţi $a > 0$ astfel ca şirul $\left(\frac{x_n}{n^a}\right)_{n\geq 1}$ să fie convergent cu limita finită şi nenulă.

Problema 3. Matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ satisface relaţia $\det(A^2 + 2019A + 2018I_3) = 2017$. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, matricea $A + nI_3$ este inversabilă.

Problema 4. Se consideră numerele reale a, b, c, d cu $a < b, c < d$ şi funcţia $f : [a, b] \to [c, d]$ care are proprietatea Darboux pe $[a, b]$ şi este discontinuă în punctele a şi b.

Să se arate că există α şi β numere reale, $\alpha \neq f(a)$, $\beta \neq f(b)$ astfel încât funcţia $g : [a, b] \to R$,

$$g(x) = \begin{cases} \alpha, & x = a \\ f(x), & x \in (a, b) \\ \beta, & x = b \end{cases}$$ are proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$.

Concursul de Matematică "Laurenţiu Panaitopol"
Tulcea, 21 Aprilie 2018

Enunţuri, Clasa a XII-a

Problema 1. Câte dintre sistemele cu coeficienţi $a, b \in \mathbb{Z}_{12}$ de forma

$$\begin{aligned} ax + by + bz &= \hat{1} \\ bx + ay + bz &= \hat{2} \\ bx + by + az &= \hat{3} \end{aligned}$$

au soluţii unice?

Problema 2. Demonstraţi cî pricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$ polinomul $f = (X-a)^2(X-b)^2 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

Problema 3. Fie $f : [0,1] \to R$ o funcţie continuă pe $[0,1]$. Să se arate că există un punct $c \in (0,1)$ astfel încât să avem

$$(c^2 - 3c + 1) \int_0^c f(x)\mathrm{d}x = c(c-1)f(c)$$

Problema 4. . Fie $\mathcal{F}$ clasa funcţiilor continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, astfel încât $\int_0^1 f(x)(1-x)\,\mathrm{d}x \geq 1$. Asociem fiecărei funcţii f din $\mathcal{F}$ funcţia continuă $\bar{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, & 0 < x \leq 1 \\ \\ f(0), & x = 0. \end{cases}$$

Determinaţi valoarea minimă pe care o poate lua $\max_{0 \leq x \leq 1} \bar{f}(x)$, când f parcurge clasa $\mathcal{F}$.