CLASA a V a

5.33) Un croitor are zece bucăți de material.El decide să taie câteva din aceste bucăți în zece bucăți fiecare. El taie apoi o parte din piesele rezultate în zece bucăți fiecare. Apoi taie cateva din aceste bucati rezultate in zece bucati fiecare.... Continuă în acest fel până când în cele din urmă obosește și se oprește. Numără bucățile de pânză pe care le are acum şi după câteva ore determină că acest număr este 1984. Arătaţi că a numărat greşit.

❖Soluție

La fiecare tăiere numărul de bucăți crește cu 9. Astfel restul împărțirii la 9 al numarului de bucăți rămâne neschimbat. Cum 10 dă restul 1 la împărțirea cu 9 și 1984 dă restul 4 înseamnă că numărătoarea este greșită

5.34) Douăzeci și cinci de echipe de fotbal sunt înscrise într-un turneu. Arătați că la sfârșitul celei de-a patra zile a turneului cel puțin una dintre echipe a jucat un număr par de jocuri.

❖Soluție

Dacă $x_1,x_2,...,x_{25}$ este numărul de jocuri al fiecărei echipe după cele 4 zile atunci suma $x_1+x_2+...+x_{25}$ este număr par, deoarece la fiecare meci suma crește cu 2, câte un meci pentru fiecare din cele două echipe. Dacă cele 25 de numere ar fi toate impare atunci suma lor ar fi număr par, ceea ce nu se poate. Prin urmare cel puțin o echipă a jucat un număr par de jocuri.

5.35) Vi se oferă 80 de monede. Șaptezeci și nouă dintre aceste monede sunt identice în greutate, în timp ce una este falsă şi mai grea. Folosind doar o balanţă, aflaţi o metodă de identificare a monedei contrafăcute utilizând doar patru cântăriri. O balanţă este un dispozitiv compus din două talere suspendate de la un braț. Prin plasarea unui set de monede pe fiecare taler, se poate determina care set de monede are o greutate mai mare, dar nu se poate determina cu cat mai mult.

❖Soluție

La prima cântarire se așează 27 de monede pe un taler și 27 pe celalat taler. Dacă balanța se înclina moneda falsa este pe talerul mai greu. Dacă rămâne in echilibru moneda este între cele care nu sunt pe talere
La a doua cântarire se așeaza 9 pe un taler și 9 pe celălalt și se izoleaza un număr de cel mult 9 monede intre care este cea falsă
La a treia cântarire se așeaza 3 pe un taler și 3 pe celălalt și se izoleaza un număr de cel mult 3 monede intre care este cea falsă

La a patra cântarire se așeaza 1 pe un taler și 1 pe celălalt și se află moneda falsă

5.36) Arătaţi că, dintre 12 numere de doua cifre, exista două a căror diferență este un număr compus din două cifre identice.

❖Soluție

Există doua din cele 12 care dau același rest la împărțirea cu 11. Diferența lor se divide cu 11 și fiind un număr de doua cifre este compus din două cifre identice.

5.37) Fie $\overline{abcdef}$ un număr întreg de 6 cifre, astfel încât $\overline{defabc}$ este de 6 ori valoarea $\overline{abcdef}$. Găsiți valoarea a + b + c + d + e + f.

❖Soluție

Din ipoteză $1000\overline{def}+\overline{abc}=6(1000\overline{abc}+\overline{def})\Leftrightarrow 994\overline{def}=5999\overline{abc}\Leftrightarrow 142\overline{def}=857\overline{abc}$

Astfel $857 \mid 142\overline{def}$. Pentru că 857 și 142 au cel mai mare divizor comun 1

Atunci $857 \mid \overline{def}$. Pentru că $2\cdot 857 > 1000$, care nu are trei cifre, se deduce că $\overline{def} = 857 \Rightarrow \overline{abc} = 142$ și $a + b + c + d + e + f = 1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 27$:

5.38) Dacă $\overline{abc}$ este un multiplu de 37, atunci la fel este si numarul $\overline{bca}$.

❖Soluție

$\overline{abc}+11\overline{bca}=100a+10b+c+11(100b+10c+a)=111a+1110b+111c=111(a+10b+c)=3\cdot 37(a+10b+c)$ se divide cu 37. Atunci $11\overline{bca}$ se divide cu $37 \Rightarrow 37 \mid \overline{bca}$

5.39) Care este cifra unităților numărului $3^{1999}\ 7^{2000}\ 17^{2001}$?.

❖Soluție

$U(3^{1999})= U(3^{1996}\cdot 3^3)=U(3^3)=7$

$U(7^{2000})= 1$

$U(17^{2001})= U(17^{2001}\cdot 17)=U(17)=7$

Atunci cifra unităților numărului $3^{1999}\ 7^{2000}\ 17^{2001}$ este 9

5.40) Într-un coș sunt 5 mere, 8 pere și 11 portocale. In fiecare zi Alice mănâncă două fructe diferite. Se poate întâmpla ca într-o zi să fie același număr de mere, pere și portocale rămase în coș?

❖Soluție

De exemplu în primele 6 zile mănâncă pere și portocale și în următoarele 3 zile pere și mere. În acest fel rămâne cu câte 2 din fiecare

5.41) Care este cel mai mare factor prim al numarului $9^{18}-3^{32}$

❖Soluție

$9^{18}-3^{32}=3^{36}-3^{32}=3^{32}(3^4-1)=80\cdot 3^{32}=2^4\cdot 5\cdot 3^{32}$, deci cel mai mare factor prim este 5

5.42) Să se arate că fracția $\frac{100^{101}+101^{100}}{100^{100}+101^{101}}$ este subunitară

❖Soluție

Se arată că $100^{101}+101^{100}<100^{100}+101^{101}\Leftrightarrow 100^{101}-100^{100}<+101^{101}-101^{100}\Leftrightarrow$
$100^{100}(100-1)<101^{100}(101-1)\Leftrightarrow 99\cdot 100^{100}<100\cdot 101^{100}$, este adevărat

Probleme propuse și selectate de prof. **Muscalu Adrian**

CLASA a VI a

6.34) Să se afle numerele naturale de trei cifre $\overline{xyz}$ cu proprietatea că $\frac{57}{x^2+2y^2+3z^2}$ este un număr natural.

❖Soluție

x, y, z sunt cifre, iar x fiind primă cifră nu poate fi zero, iar pentru ca fracția să fie un număr natural

$x^2+2y^2+3z^2$ trebuie să dividă pe 57.

Deci $x^2+2y^2+3z^2 \in \{1,3,19,57\}$

Caz I $x^2+2y^2+3z^2=1$ și cum $1\leq x^2\leq 1$, rezultă $x^2=1$ și $2y^2+3z^2=0$. **Deci 100 este soluție.**

Caz II $x^2+2y^2+3z^2=3$ și cum $1\leq x^2\leq 3$ și e pătrat perfect, rezultă $x^2=1$, deci x=1 (x e cifră) și

$2y^2+3z^2=2$ (1).

Deci $0\leq 2y^2\leq 2$, rezultă că $0\leq y^2\leq 1$.

1) $y^2=0$, deci y=0 și din ecuația (1) rezultă $3z^2=2$, fals.
2) $y^2=1$, deci y=1 și din ecuația (1) rezultă $3z^2=0$, deci z=0. **Deci 110 este soluție.**

Caz III $x^2+2y^2+3z^2=19$ (2) și cum $0\leq 3z^2\leq 19$, deci $0\leq z^2\leq 6$ și e pătrat perfect, rezultă $z^2\in\{0,1,4\}$

1) $z^2=0$, deci z=0 și din ecuația (2) rezultă $x^2+2y^2=19$, cum $0\leq 2y^2\leq 19$, rezultă $y^2\in\{0,1,4,9\}$.
   a) y=0, rezultă $x^2=19$, fals.

b) y=1, rezultă $x^2 = 17$, fals.
c) y=2, rezultă $x^2 = 11$, fals.
d) y=3, rezultă $x^2 = 1$, deci x=1. **Deci 130 este soluție**.

2) z^2=1, deci z=1 și din ecuația (2) rezultă $x^2 + 2y^2 = 16$, cum $0 \leq 2y^2 \leq 16$, rezultă $y^2 \in \{0, 1, 4\}$.
a) y=0, rezultă $x^2 = 16$, deci x=4. **Deci 401 este soluție**.
b) y=1, rezultă $x^2 = 14$, fals.
c) y=2, rezultă $x^2 = 8$, fals.

3) z^2=4, deci z=2 și din ecuația (2) rezultă $x^2 + 2y^2 = 7$, cum $0 \leq 2y^2 \leq 7$, rezultă $y^2 \in \{0, 1\}$.
a) y=0, rezultă $x^2 = 7$, fals..
b) y=1, rezultă $x^2 = 5$, fals.

Caz IV $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 57$ (3) și cum $0 \leq 3z^2 \leq 57$, deci $0 \leq z^2 \leq 19$ și e pătrat perfect, rezultă $z^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16\}$

1) z^2=0, deci z=0 și din ecuația (3) rezultă $x^2 + 2y^2 = 57$, cum $0 \leq 2y^2 \leq 57$, rezultă $y^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$.
a) y=0, rezultă $x^2 = 57$, fals.
b) y=1, rezultă $x^2 = 55$, fals.
c) y=2, rezultă $x^2 = 49$, deci x=7. **Deci 720 este soluție**
d) y=3, rezultă $x^2 = 39$, fals.
e) y=4, rezultă $x^2 = 25$, deci x=5. **Deci 540 este soluție**.
f) y=5, rezultă $x^2 = 7$, fals.

2) z^2=1, deci z=1 și din ecuația (3) rezultă $x^2 + 2y^2 = 54$, cum $0 \leq 2y^2 \leq 54$ rezultă $y^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$.
a) y=0, rezultă $x^2 = 54$, fals.
b) y=1, rezultă $x^2 = 52$, fals.
c) y=2, rezultă $x^2 = 46$, fals.
d) y=3, rezultă $x^2 = 36$, deci x=6. **Deci 631 este soluție**.
e) y=4, rezultă $x^2 = 22$, fals.
f) y=5, rezultă $x^2 = 4$, deci x=2. **Deci 251 este soluție**.

3) z^2=4, deci z=2 și din ecuația (3) rezultă $x^2 + 2y^2 = 45$, cum $0 \leq 2y^2 \leq 45$, rezultă $y^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16\}$.
a) y=0, rezultă $x^2 = 45$, fals.
b) y=1, rezultă $x^2 = 43$, fals.
c) y=2, rezultă $x^2 = 37$, fals.
d) y=3, rezultă $x^2 = 27$, fals.
e) y=4, rezultă $x^2 = 13$, fals.

4) z^2=9, deci z=3 și din ecuația (3) rezultă $x^2 + 2y^2 = 30$, cum $0 \leq 2y^2 \leq 30$, rezultă $y^2 \in \{0, 1, 4, 9\}$.

a) y=0, rezultă $x^2 = 30$, fals.
b) y=1, rezultă $x^2 = 28$, fals.
c) y=2, rezultă $x^2 = 22$, fals.
d) y=3, rezultă $x^2 = 12$, fals.

5) z^2=16, deci z=4 și din ecuația (3) rezultă $x^2 + 2y^2 = 9$, cum $0 \leq 2y^2 \leq 9$, rezultă $y^2 \in \{0, 1, 4\}$.
a) y=0, rezultă $x^2 = 9$, deci x=3. **Deci 304 este soluție.**
b) y=1, rezultă $x^2 = 7$, fals.
c) y=2, rezultă $x^2 = 1$, deci x=1. **Deci 124 este soluție.**

Soluția 124, 304, 251, 631, 540, 720, 401, 130, 110, 100.

6.35) Ana, Mircea și George au rezolvat împreună tema de vacanță. George a rezolvat cu două mai multe probleme decât Mircea. Triplul numărul problemelor rezolvate de Mircea este cu patru mai mică decât numărul problemelor rezolvate de Ana. Suma numerelor problemelor rezolvate de Mircea și George este cu cinci mai mică decât numărul problemelor rezolvate de Ana.

❖Soluție

Notăm cu x- numărul de probleme rezolvate de Ana, y- numărul de probleme rezolvate de Mircea și cu z - numărul de probleme rezolvate de George.

$$\begin{cases} x - 5 = y + z \\ 3y = x - 4 \\ z = y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 4 \\ z = y + 2 \\ 3y + 4 - 5 = y + y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 13 \\ z = 5 \end{cases}$$

Soluția
Ana a rezolvat 13 probleme
Mircea a rezolvat 3 probleme
George a rezolvat 5 probleme.

6.36) Fie triunghiul ABC, cu AB < AC, se consideră $[AD$ bisectoarea interioară a < BAC, unde D ∈ $[BC]$, iar $[AE$ bisectoarea exterioară a < BAC, unde E ∈ BC. Se consideră F aparținând semidreptei opuse, semidreptei $[AE$, cu proprietatea că $[AE] \equiv [AF]$ și G intersecția dreptelor AC și DF. Să se arate că $[BE] \equiv [GF]$.

❖Soluție

AD este înălțime în triunghiul în DEF și cum e și mediană, rezultă că triunghiul DEF este isoscel.

$\Delta AEB \equiv \Delta AFG$ (cazul U.L.U.) $\begin{cases} [AE] \equiv [AF] \\ < AEB \equiv < AFG \\ < EAB \equiv < FAG \end{cases}$, deci $[BE] \equiv [GF]$.

6.37) Să se determine numerele întregi x și y știind că diferența dintre produsul și suma lor este 2017.

❖Soluție

xy – x- y = 2017, rezultă x (y-1) – (y-1)= 2018, deci (x-1)(y-1)=2018.

Cum 2018=2 * 1009

Caz I

$\begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-2018 \end{cases}$, deci x=0 și y= -2017.

Caz II

$\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=2018 \end{cases}$, deci x=2 și y= 2019.

Caz III

$\begin{cases} x-1=-2 \\ y-1=-1009 \end{cases}$, deci x= -1 și y= -1008.

Caz IV

$\begin{cases} x-1=2 \\ y-1=1009 \end{cases}$, deci x= 3 și y= 1010.

Caz V

$\begin{cases} x-1=-1009 \\ y-1=-2 \end{cases}$, deci x= -1008 și y= -1.

Caz VI

$\begin{cases} x-1=1009 \\ y-1=2 \end{cases}$, deci x=1010 și y= 3.

Caz VII

$\begin{cases} x-1=-2018 \\ y-1=-1 \end{cases}$, deci x= -2017 și y= 0.

Caz VIII

$\begin{cases} x-1=2018 \\ y-1=1 \end{cases}$, deci x=2019 și y= 2.

Se observă ultimile 4 cazuri sunt simetrice cu primele, deoarece ecuația este simetrică în x și y, deci se puteau scrie direct soluțiile.

Soluția (0, -2017); (2, 2019); (-1,-1008); (3,1010); (-1008,-1); (1010, 3); (-2017, 0); (2019,2).

6.38) Să se determine numerele de forma A= $\overline{3a1b5c}$ care să fie divizibile cu 3, 4 și 11.

❖Soluție

Cum $A \vdots 4 \Rightarrow \overline{5c} \vdots 4$, rezultă $\overline{5c} \in \{52, 56\}$

Caz I $c = 2$, rezultă A= $\overline{3a1b52} \vdots 11$, rezultă a+b+2-9: 11 și cum a și b sunt cifre, rezultă $-7 \leq a + b - 7 \leq 11$, rezultă a+b-7 $\in \{0, 11\}$.

Cum A: 3, rezultă 3+a+1+b+7: 3, deci a+b+11 $\vdots$ 3

a) a+b-7=0, rezultă 18: 3, adevărat.
Deci, 301752, 311652, 321552, 331452, 341352, 351252, 361152, 371052 sunt soluții.

b) a+b=18, rezultă 29: 3, fals.

Caz II $c = 6$, rezultă A= $\overline{3a1b56} \vdots 11$, rezultă a+b+6-9: 11 și cum a și b sunt cifre, rezultă $-3 \leq a + b - 3 \leq 15$, rezultă a+b-3 $\in \{0, 11\}$.

Cum A: 3, rezultă 3+a+1+b+11: 3, deci a+b+15 $\vdots$ 3

a) a+b-3=0, rezultă 18: 3, adevărat.
Deci, 301356, 311256, 321156, 331056 sunt soluții.

b) a+b=14, rezultă 29: 3, fals.

Soluția 301752, 311652, 321552, 331452, 341352, 351252, 361152, 371052, 301356, 311256, 321156, 331056.

6.39) Să se afle numerele care îndeplinesc simultan condițiile. Diferența dintre primul număr și suma dintre numerele al doilea și dublul celui de al treilea este zero. Diferența dintre primul număr și triplul celui de al doilea este patru. Diferența dintre al treilea număr și al doilea număr este doi.

❖Soluție

Fie x, y și z primul, al doilea și respectiv al treilea număr.

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x - 3y = 4 \\ z - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 4 \\ z = y + 2 \\ 3y + 4 - y - 2(y + 2) = 0 \ (A) \end{cases}$$

Soluția Avem o infinitate de soluții de forma (3y+4, y, y+2), unde y$\in R$.

6.40) Să se calculeze raportul $\frac{2018a+2019b}{2018c+2019d}$, știind că $\frac{2000a+3b}{7a+2017b} = \frac{2000c+3d}{7c+2017d}$, iar numerele b și d sunt invers proporționale cu numerele 101 și 102.

❖Soluție

Din $\frac{2000a+3b}{7a+2017b}=\frac{2000c+3d}{7c+2017d} => (2000a+3b)(7c+2017d)=(2000c+3d)(7a+2017b)$ =>

$2000\cdot 7\,ac+21bc+2000\cdot 2017\,ad+2017\cdot 3\,bd$

$= 2000\cdot 7\,ac+21\,ad+2000\cdot 2017\,bc+2017\cdot 3bd$

⇨ $(2000\cdot 2017-21)\,ad=(2000\cdot 2017-21)\,bc => ad=bc => a=\frac{bc}{d}$ (1)

Cum numerele b și d sunt invers proporționale cu numerele 101 și 102, rezultă 101 b=102 d (2).

Din (1) și (2) rezultă $\frac{2018a+2019b}{2018c+2019d}=\frac{2018\frac{bc}{d}+2019b}{2018c+2019d}=\frac{\frac{b}{d}(2018c+2019d)}{2018c+2019d}=\frac{b}{d}=\frac{102}{101}$

Soluția Deci raportul $\frac{2018a+2019b}{2018c+2019d}=\frac{102}{101}$.

6.41) Fie pătratul ABCD pe care se construiește în exterior triunghiul echilateral CED și fie EM perpendiculară pe DE, unde M aparține dreptei AB. Să se arate că

a) $[AM]\equiv[EM]$

b) $[EF]\equiv\frac{[AE]}{2}$, unde F este piciorul perpendicularei din E pe semidreapta $[AC$.

c) $[EC]\equiv[EN]$, unde $\{N\}=EM\cap AC$.

d) $[EC]\equiv[EN]$, unde $\{N\}=EM\cap AC$.

❖Soluție

a) Triunghiul EDA este isoscel ($[DE]\equiv[AD]$), deci $\widehat{DAE}\equiv\widehat{DEA}$, rezultă m($\widehat{DAE}$)=15°.
Deci m($\widehat{MAE}$)=90°-15°=75° și m($\widehat{AEM}$)=90°-15°=75°, rezultă că triunghiul EMA este isoscel, în concluzie $[AM]\equiv[EM]$.

b) În triunghiul dreptunghic AEF, avem m($\widehat{AEM}$)=45°-15°=30°, deci cum cateta $[EF]$ se opune unui unghi de 30°, este egală cu jumătate din ipotenuză, rezultă $[EF]\equiv\frac{[AE]}{2}$.

c) Cum m($\widehat{AEC}$)= 60°-15° = 45° , rezultă că m($\widehat{CEN}$)= 75°-45° = 30° (1).
Cum EF este perpendiculară pe AC, rezultă m($\widehat{AEF}$)= 60°, deci m($\widehat{FEN}$)= 75°-60° = 15° (2).
Din (1) și (2) rezultă că EF este bisectoare în triunghiul CEN și cum EF este și înălțime, rezultă că triunghiul CEN este isoscel, deci $[EC]\equiv[EN]$.

6.42)

a) Demonstrați că pentru orice n natural numărul $5^{2n+3}\cdot 4^{2n+3}+2^{2n+1}\cdot 10^{2n+3}$ este pătrat perfect.

b) Arătați că numărul a = $2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{2019}$ este multiplu de 14.

❖Soluție

a)

$5^{2n+3} \cdot 4^{2n+3} + 2^{2n+1} \cdot 10^{2n+3} = 20^{2n+3} + 20^{2n+1} \cdot 10^2 = 20^{2n+1}(20^2 + 10^2) = 20^{2n} \cdot 20 \cdot 5 \cdot 10^2 = (20^n \cdot 10 \cdot 10)^2$ deci este pătrat perfect.

b) $a = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{2019} = (2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \ldots + (2^{2017} + 2^{2018} + 2^{2019}) = 14 + 2^3 \cdot 14 + \cdots + 2^{2016} \cdot 14 = 14 \cdot (1 + 2^3 + \cdots + 2^{2016})$ deci divizibil cu 14.

6.43) Să se afle toate numerele de patru cifre care se pot scrie cu a, b, c, d, unde:

$a = 81^{2^3} : 243^6 + 2010^{2019^{0^{1485}}} - 2019$

$b = 15 - 11 \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3}}}}$

$c = (2^{2018} - 2^{2017} - 2^{2016}) : 16^{504}$

$d = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{10302}\right) : (1 + 2 + 3 + \cdots + 101) \cdot 10404.$

❖Soluție

$a = 81^8 : 3^{30} + 2010 - 2019 = 3^{32} : 3^{30} + 2010 - 2019 = 9 + 2010 - 2019 = 0$

$b = 15 - 11 \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{3}{4}}} = 15 - 11 \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{4}{7}} = 15 - 11 \cdot \frac{7}{11} = 8$

$c = 2^{2016} \cdot (4 - 2 - 1) : 2^{2016} = 1$

$d = (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{101} - \frac{1}{102}) : \frac{101 \cdot 102}{2} \cdot 102^2 = (1 - \frac{1}{102}) \cdot \frac{2}{101 \cdot 102} \cdot 102^2 = 2$

Cum numerele nu pot să înceapă cu 0, vom avea:
1028, 1082, 1208, 1280, 1820, 1802,
2018, 2081, 2108, 2180, 2810, 2801,
8012, 8021, 8201, 8210, 8102, 8120

Probleme propuse și selectate de prof. **Ftadeev-Brad Adriana-Floriana**

CLASA a VII a

7.34) Într-un pătrat de latură 60 cm se consideră 121 de puncte distincte. Arătați că , printer acestea ,există trei puncte cu proprietatea că aria triunghiului determinat de ele este cel mult egală cu 30.

❖Soluție

Împărțim pătratul în 60 de dreptunghiuri de dimensiuni 6 cm x 10 cm. Având 121 de puncte, înseamnă că unul din aceste dreptunghiuri conține măcar 3 puncte.Problema se reduce la următoarea:" Date 3 puncte necoliniare în interiorul sau pe laturile unui dreptunghi , arătați că aria triunghiului determminat de cele 3 puncte este cel mult jumătate din aria dreptunghiului."

Pentru demonstrație separăm două cazuri:

a. Una dintre laturi este paralelă cu una dintre laturile dreptunghiului. În acest caz inalțimea triunghiului este paralelă cu cealaltă și se verifică imediat.
b. Dacă niciuna dintre laturi nu este paralelă cu una dintre laturile dreptunghiului,atunci construim printr-un varf al dreptunghiului o paralelă la o latură care va împărții triunghiul în două triunghiuri cu o latură paralelă cu o latură a dreptunghiului. Se aplică în continuare raționamentul de la punctul "a".



7.35) Fie ABCD un paralelogram cu m(∢DAB)$< 90^0$.Construim BE ⊥ AD,(E∈(AD)), DF⊥AB, (F∈(AB)) și $\{H\}$=BE∩DF.Dacă B_1 ∈(HB astfel încât $[HB_1] \equiv [AD]$și D_1 ∈(HD astfel încât $[HD_1] \equiv [AB]$, se cere:

a) Arătați că $[B_1D_1] \equiv [AC]$
b) Demonstrați că AC⊥ B_1D_1.

❖Soluție

a) Se demonstrează că △ADC≡△ B_1HD_1(LLL),deci $[B_1D_1] \equiv [AC]$.
b)Se identifică, pe baza rezultatului de la a) perechile de unghiuri congruente șicomplementare și se demonstrează că AC⊥ B_1D_1.



7.36) Determinați suma numerelor $\overline{ab}$, știind că $\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}+4}$ este număr natural.

❖Soluție

Fie k∈N, $\overline{ab}+\overline{ba}+4=k^2$.Atunci 11(a+b)=(k-2)(k+2), deci 11/(k-2) sau 11/(k+2).

a)Fie p∈N, k=11p+2.Atunci a+b=p(11p+4). Cum a+b≤18, p nu poate fi decât 1, caz în care a+b=15,deci $\overline{ab} \in \{69,96,78,87\}$;

b) Fie p∈N, k=11p-2. Atunci a+b=p(11p-4) și din nou p nu poate fi decât 1, caz în care a+b=7. Atunci , $\overline{ab} \in \{16,61,25,52,34,43\}$.

Suma cifrelor este 15 sau 7.

7.37) Se dă △ABC și punctul D∈(BC). Paralela prin D la AB intersectează pe AC în punctul E ,iar paralela prin D la AC intersectează pe AB în punctul F.

a) Arătați că DF+FA=AE+ED.

b) Demonstrați că raportul ariilor $\triangle BDF$ și △ADF este egal cu inversul raportului ariilor △CDE și △AED.

❖Soluție

a) Evident ,deoarece AFDE este paralelogram.

b) Trebuie sădemonstrăm că $\frac{A_{\triangle BDF}}{A_{\triangle ADF}}=\frac{A_{\triangle AED}}{A_{\triangle CDE}}$.În primul rând $A_{\triangle AED}=A_{\triangle ADF.}$ Fie CP⊥ AB și CP∩ED={Q},P∈AB. Atunci $A_{\triangle BDF}=\frac{PQ*AB}{2}$; $A_{\triangle ADF}=\frac{PQ*AF}{2}$; $A_{\triangle CED}=\frac{CQ*ED}{2}$; $A_{\triangle AED}=A_{\triangle AFD}=\frac{PQ*AF}{2}=\frac{PQ*ED}{2}$. Astfel ,avem de arătat că $\frac{FB}{AF}=\frac{PQ}{CQ}$ sau echivalent, $\frac{FB}{ED}=\frac{PQ}{CQ}$, relație evidentă, deoarece $\triangle BFD$ și $\triangle DEC$ sunt asemenea.

7.38) Arătați că dacă x,y ∈ R^* astfel încât $5x^3+2x^2y=2y^3+5xy^2$, atunci $\frac{3x+4y}{4x+3y}\in Z$.

❖Soluție

Relația se scrie (5x+2y)(x-y)(x+y)=0. Se disting cazurile:

a) x=y⇒ $\frac{3x+4y}{4x+3y}=1$.

b) x=-y⇒ $\frac{3x+4y}{4x+3y}=-1$.

c) 5x=-2y ⇒ $\frac{3x+4y}{4x+3y}=2$.

7.39) Calculați suma primelor 30 zecimale ale numărului $(3-2\sqrt{2})^{100}$.

❖Soluție

$(3-2\sqrt{2})^{100}<(0,25)^{100}=\frac{1}{2^{200}}=\frac{1}{(2^{10})^{20}}=\frac{1}{1024^{20}}<\frac{1}{1000^{20}}<\frac{1}{10^{60}}$,deci (cel puțin) primele 60 de zecimale ale numărului snt zero.

7.40) Fie ABC un triunghi cu AB≠AC. Notăm cu M,N,P mijloacele laturilor BC, CA, respective AB și cu D piciorul înălțimii din A. Demonstrați că patrulaterul cu vârfurile în punctele D,M,Nși P este trapez isoscel. Ce se întâmplă în cazul în care AB=AC?

❖Soluție

Considerăm, fără a restrânge generalitatea, că AB< AC; în acest caz, D∈ $[BM]$. Cum PN și MN sunt linii mijlocii în triunghiul ABC, atunci PN∥BC și MN∥AB. Întrucât SB ți PD sunt concurente, rezultă că MN și PD sunt concurente. Patrulaterul DMNP este trapez, având două laturi paralele și două neparalele.

Cum MN=1/2 AB(linie mijlocie în $\triangle ABC$) și DP=1/2AB(mediană în triunghiul dreptunghic ABD), atunci MN=DP, adică DMNP este trapez isoscel. Dacă AB=AC, punctele M și N coincid, iar patrulaterul DMNP degenerează într-un triunghi isoscel asemenea cu cel inițial, raportul de asemănare fiind de $\frac{1}{2}$.

7.41)

a) Arătați că există cel puțin un număr natural n astfel încât $10^{29} < 2^n < 10^{30}$

b)Numărul 2^m se scrie cu 30 de cifre. Arătați că există o cifră care se repetă de cel puțin patru ori în scrierea lui 2^m.

❖Soluție

a) Presupunem, prin absurd, contrariul: există p număr natural astfel încât $2^p < 10^{29} < 10^{30} < 2^{p+1}$;atunci 2=$\frac{2^{p+1}}{2^p} > \frac{10^{30}}{10^{29}}$=10, fals.

b)Presupunem că fiecare din cifrele 0,1,...,9 apare exact de trei ori fiecare în scrierea lui 2^m. Atunci suma cifrelor lui 2^m va fi 3(1+2+...+9)=3*45,deci 2^m se va divide cu 3, imposibil.

7.42) Fie trapezul ABCD,cu bazele AB=7 cm și CD=1 cm. Fie M∈(AD), N∈ (BC) astfel încât MN∥AB, iar patrulaterele ABNM și MNCD au arii egale. Calculați MN.

❖Soluție

Vom folosi faptul că raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.Fie$\{P\} =$AD∩BC.În $\triangle PAB$,DC∥AB, rezultă că $\triangle PDC \sim \triangle PAB$și $\frac{A_{\triangle PDC}}{A_{\triangle PAB}}=\left(\frac{DC}{AB}\right)^2=\frac{1}{49}$,adică, dacă S=$A_{\triangle PDC}$, atunci $A_{\triangle PAB}$=49S și deci A_{ABCD}=48S.Deoarece $A_{MNCD}=A_{ABNM}$, rezultă că A_{MNCD}=24S și A_{PMN}=25S. Pe baza rezultatului amintit la început, $\frac{A_{PDC}}{A_{PMN}}=\left(\frac{DC}{MN}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{S}{25S}=\left(\frac{1}{MN}\right)^2$, de unde MN=5cm.

7.43) Determinați k ∈Z pentru care numărul N =$\frac{\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{k+1}$ este întreg.

❖Soluție

N=$\frac{|2-\sqrt{3}|+|\sqrt{3}-\sqrt{2}|+|3+\sqrt{2}|}{k+1}=\frac{5}{k+1}$ ∈Z. Din condiția de divizibilitate se obține k∈ $\{-6,-2,0,4\}$.

Probleme propuse și selectate de prof. **Căpriță Doru-Marian**

CLASA a VIII a

8.33) Pentru numerele reale strict positive a_1, a_2,..., a_n, unde n∈ N^*,să se arate că:
$\frac{a_1^2+4a_1+5}{a_1+2}+\frac{a_2^2+4a_2+5}{a_2+2}+...+\frac{a_n^2+4a_n+5}{a_n+2}>2$.

❖Soluție

Pornim de la inegalitatea: $\frac{x^2+1}{x}\geq 2$, echivalentă cu $(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})\geq 0$;egalitatea având loc pentru x=1. $\frac{a_k^2+4a_k+5}{a_k+2}=\frac{(a_k+2)^2+1}{a_k+2}\geq 2$,pentru orice k. Adunând relațiile,obținem inegalitatea cerută.Egalitatea nu poate avea loc deoarece $a_k+2\geq 2$.

8.34) Rezolvați în R ecuația: $\sqrt{x+\sqrt{4x-3}+\frac{1}{4}}+\sqrt{x-\sqrt{4x-3}+\frac{1}{4}}=\frac{3x-1}{4}$

❖Soluție

Din condițiile de existență obținem $x\geq\frac{3}{4}$.Ecuația se poate scrie $\sqrt{4x+4\sqrt{4x-3}+1}+\sqrt{4x-4\sqrt{4x-3}+1}=\frac{3x-1}{2}$, sau $|\sqrt{4x-3}+2|+|\sqrt{4x-3}-2|=\frac{3x-1}{2}$.Prin explicitarea modulelor obținem :x_1=7,care verifică condițiile și $x_2=\frac{7}{9}$, care nu verifică.

8.35) Calculați: $\frac{1^2}{1^4+1}+\frac{2^2-1}{1^4+2}+\frac{3^2-2}{3^4+3}+...+\frac{2018^2-2017}{2018^4+2018}$.

❖Soluție

Notăm cu S suma cerută.
Avem:$\frac{(k+1)^2-k}{(k+1)^4+(k+1)}=\frac{k^2+2k+1-k}{(k+1)[(k+1)^3+1]}=\frac{k^2+k+1}{(k+1)(k+2)(k^2+k+1)}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$.
Folosind această relație în suma noastră,obținem:
$S=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}\right)=1-\frac{1}{2019}$.

8.36) Fie $[AB]$și $[CD]$ două segmente necoplanare,iar M și N mijloacele lor. Să se demonstreze că MN $<\frac{AD+BC}{2}$.

❖Soluție

Fie P mijlocul segmentului $[AC]$.Rezultă că $[MP]$ și $[NP]$ sunt linii mijlocii în ΔABC și ΔCAD.Avem MN <MP+PN=$\frac{AD+BC}{2}$.

8.37) În cubul ABCD$A'B'C'D'$ notăm cu H piciorul perpendicularei din B pe planul AB'C și cu I intersecția dreptelor D'O și $B'D$,unde O este ortocentrul pătratului ABCD. Aflați măsura unghiului plan corespunzător unghiului diedru format de planele HIC' și ACA'.

❖Soluție

Fie "a" lungimea laturii cubului. Atunci BD=a$\sqrt{2}$, BO=$\frac{a\sqrt{2}}{2}$. În triunghiul dreptunghic OBB', $B'O=\frac{a\sqrt{6}}{2}$ și cu ajutorul teoremei catetei : $OB^2=B'O*OH$, obținem OH=$\frac{a\sqrt{6}}{6}$. Atunci $\frac{OH}{OB'}=\frac{a\sqrt{6}}{6}\frac{2}{a\sqrt{6}}=\frac{1}{3}$. Din BD∥$B'D'$ rezultă că ΔODI~Δ$D'B'I$,de unde rezultă că $\frac{OI}{OD'}=\frac{1}{3}$. Deoarece $\frac{OH}{OB'}=\frac{OI}{OD'}$, rezultă că IH∥$D'B'$; $D'B'$ ⊥(ACA')⇒ IH⊂(ACA').
IH⊂(HIC')⇒(HIC')⊥(ACA').

8.38) Se consideră două segmente oarecare în spațiu, $[AB]$ și $[CD]$,astfel încât să aibă loc egalitatea $\frac{CA}{CB}+\frac{CB}{CA}+\frac{DA}{DB}+\frac{DB}{DA}=4$. Demonstrați că AB⊥CD.

❖Soluție

Folosim inegalitatea : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$,oricare ar fi a,b>0, cu egalitate doar când a=b.Avem $\frac{CA}{CB}+\frac{CB}{CA}\geq 2$ și $\frac{DA}{DB}+\frac{DB}{DA}\geq 2$.Adunând relațiile obținem: $\frac{CA}{CB}+\frac{CB}{CA}+\frac{DA}{DB}+\frac{DB}{DA}\geq 4$,egalitatea având loc pentru CA=CB și DA=DB.Atunci triunghiurile ABC și ABD sunt isoscele.Notăm cu M mijlocul segmentului $[AB]$.Avem CM ⊥AB și DM⊥ AB.
Atunci AB⊥(DMC)⇒AB⊥DC.

8.39) Dacă $a+\frac{1}{a}=5$, a∈R*,să se calculeze valoarea expresiei:

$$E(a)=\frac{a}{1+a^2}+\frac{a^2}{1+a^4}+\frac{a^3}{1+a^6}.$$

❖Soluție

$E(a)=\frac{1}{a+\frac{1}{a}}+\frac{1}{a^2+\frac{1}{a^2}}+\frac{1}{a^3+\frac{1}{a^3}}$.Avem:$a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})^2-2=23$ și
$a^3+\frac{1}{a^3}=(a+\frac{1}{a})^3-3(a+\frac{1}{a})=110$,rezultate pe care le înlocuim în E(a).

8.40) Se dă ecuația :$\frac{x(x-1)(x-3)(x-4)}{x^2-4x+8}$=a.
a)Să se determine a∈R astfel încât ecuația să aibă o singură rădăcină întreagă.
b) Să se determine a∈R astfel încât ecuația să aibă o singură rădăcină reală.

❖Soluție

Notăm f(x)= $\frac{x(x-1)(x-3)(x-4)}{x^2-4x+8}$=$\frac{x(x-1)(x-3)(x-4)}{(x-2)^2+4}$. Se observă ca f(4-x)=f(x), deci dacă x_0 este soluție a ecuației date, rezultă că 4-$x_0$este soluție a ecuației .Pentru ca ecuația să aibă o unică rădăcină x_0 trebuie să avem $x_0 = 4 - x_0$, deci x_0=2.f(2)=1,rezultă că dacă ecuația are o singură soluție a=1.
Pentru a=1 ecuația devine: $\frac{(x^2-4x)(x^2-4x+3)}{x^2-4x+8}$=1. Notăm$x^2 - 4x$=t și ecuația devine:$t^2 + 2t - 8 = 0$ cu rădăcinile $t_1 = -4$ $și t_2 = 2, deci\ x_1 = \ x_2 = 2$ $și\ x_{3,4} = 2 \mp \sqrt{6}$. Așadar pentru a) avem a=1 și pentru b)a∈∅.

8.41) Se consideră un cub cu muchia de lungime 1. Să se arate că tetraedrul cu vârfurile în mulțimea vârfurilor cubului are volumul $\frac{1}{6}$ daca și numai dacă trei din vârfurile tetraedrului sunt vârfuri ale unei fețe a cubului.

❖Soluție

Dacă trei dintre vârfurile tetraedrului sunt pe o față a cubului,atunci ele sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic isoscel. Al patrulea vârf se află pe o față opusă, la distanța 1 fată de baza formată de triunghiul menționat anterior.Rezultă că volumul tetraedrului este $\frac{1}{6}$.Să presupunem prin absurd că există un tetraedru de volum $\frac{1}{6}$ care nu are vârfurile pe o față a cubului. Fie M un vârf al tetraedrului. Dacă pe fețele ce conțin acest vârf nu s-ar mai afla vârfuri ale tetraedrului,, acestea ar putea fi plasate doar în punctul diagonal opus vârfului M,contradicție. Există astfel o fată a cubului care are exact două vârfuri ale tetraedrului și,evident, pe o față opusă se vor g-si celelalte două vârfuri ale tetraedrului.pentru a stabili notațiile,fie ABCD și A´ B´ C´ D´ cele două fețe.

a) Vârfurile tetraedrului de pe fața ABCD sunt capetele unei muchii a cubului, de exemplu A și B. Atunci A´ sau B´ nu sunt vârfuri ele tetraedrului,altfel fața ABB´ A´ ar conține trei vârfuri ale tetraedrului.Rezultă ca C´ și D´ sunt vârfuri ale tetraedrului,contradicție.
b) Vârfurile de pe fața ABCD sunt capetele unei diagonale,de exemplu A și C.Argumentele similare cazului precedent arată că B´ și D´ sunt celelalte vârfuri ale tetraedrului.Dar ACB´ D´ este tetraedru regulat de volum $\frac{1}{3}$,de unde rezultă contradicția.În consecință, în condițiile problemei, un tetraedru de volum $\frac{1}{6}$ are trei vârfuri pe o față a cubului.

8.42) Câte elemente are mulțimea A=$\left\{x \in Z \mid \frac{x^5+x^3+x^2-1}{x^2+1} \in Z\right\}$?

❖Soluție

Se poate arăta că $\frac{x^5+x^3+x^2-1}{x^2+1}=x^3+1-\frac{2}{x^2+1} \in Z \Rightarrow x^2+1 \in \{1,2\} \Rightarrow$ $x \in \{-1,0,1\} \Rightarrow A=\{-1,1\}$.

Probleme propuse și selectate de prof. **Căpriță Doru-Marian**