CLASA a IX – a

9.32) Arătați că numărul 11^{4n+1}-9·22^{2n}-24^{n+1}:1521,∀n∈N^*.

❖Soluţie

Notăm x=11^{2n},y=2^{2n}.Avem S=$11x^2-9xy-2y^2$=(x-y)(11x+2y). Cum x-y=121^n-4^n:(121-4)=117 și 11x+2y=$11^{2n+1}+2^{2n+1}$:(11+3)=13, deduce că S:(117· 13) = 1521

9.33) Fie x,y∈(0,∞) care satisfac inegalitățile: x≥$\frac{1}{4}$+xy și y≥$\frac{1}{4}$+xy. Arătați că x=y.

❖Soluţie

Înmulțind inegalitățile, obținem xy≥$\left(\frac{1}{4}+xy\right)^2$,de unde rezultă că $\left(xy-\frac{1}{4}\right)^2\leq 0$.Rezultă că xy=$\frac{1}{4}$.Deducem x≥$\frac{1}{2}$, y≥$\frac{1}{2}$și xy=$\frac{1}{4}$ și de aici x=y=$\frac{1}{2}$.

9.34) Fie a∈R.Determinați toate numerele x,y∈Z^*care au proprietatea că 4^x+4^y=$\frac{a^2+a+1}{a^1+1}$.

❖Soluţie

Dacă notăm f(a)= $\frac{a^2+a+1}{a^2+1}$,se poate arăta că f(a) ∈$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$, ∀a∈R. Dacă x≥1 sau y≥1, rezultă că 4^x+4^y≥4. Dacă x<-1 și y<-1 ,rezultă că 4^x+4^y<$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.Deducem x=y=-1.

9.35) Fie a,b,c>0 astfel încât ab+bc+ca=1.Arătați că:

a) a+b+c≥3;

b) $\frac{1}{1+a^2}$+$\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\geq\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}$

❖Soluţie

a)Deoarece $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$,avem $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$+2(ab+bc+ca)≥3(ab+bc+ca)=3 și de aici rezultă că a+b+c≥ $\sqrt{3}$.

b)Din relația ab+bc+ca=1 obținem a=$\frac{1-bc}{b+c}$,apoi 1+$a^2=\frac{(b^2+1)(c^2+1)}{(b+c)^2}$,deci b+c=$\sqrt{\frac{(b^2+1)(c^2+1)}{1+a^2}}$ și analoagele. Însumând aceste relații, avem:2(a+b+c)= $\sqrt{\frac{(b^2+1)(c^2+1)}{1+a^2}}+\sqrt{\frac{(c^2+1)(a^2+1)}{1+b^2}}+\sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{1+c^2}}\geq 2\sqrt{3}$ echivalentă cu $\frac{1}{1+a^2}$+$\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\geq\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}$.

9.36) Rezolvați sistemul:$\begin{cases}x+[y]+\{z\}=1,2\\y+[z]+\{x\}=2,3\\z+[x]+\{y\}=3,5\end{cases}$, unde x,y,z>0, iar$[a]$reprezintă partea întreagă a numărului a.

❖Soluţie

Adunând cele trei ecuații, găsim 2(x+y+z)=7, de unde x+y+z=3,5. Adunând primele două ecuații, avem x+y+z+$[y]+\{x\}$=3,5, de unde $[y]+\{x\}$=0 sau$[y]=0$, $\{x\}$=0. Adunând ultimele două ecuații,găsimx+y+z+$[z]+\{y\}$=5,8 ,de unde $[z]+\{y\}$=2,3 sau $[z]=2$ $și\{y\}$=0,3. Adunând prima și ultima ecuație,avem x+y+z+$[x]+\{z\}$=4,7,de unde $[x]+\{z\}$=1,2 sau $[x]=1$ $și\{z\}$=0,2. Rezultă că x=1, y=0,3 și z=2,2.

9.37) Fie A_1, B_1, C_1proiecțiile centrului de greutate G al triunghiului ABC pe laturile sale, de lungimi a,b,c.Arătați ca $a^2\cdot\overline{GA_1}$+$b^2\cdot\overline{GB_1}+c^2\cdot\overline{GC_1}=\bar{0}$

❖Soluţie

Fie M piciorul medianei din A și D piciorul înălțimii din A. Rezultă $\overline{GA_1}=\frac{1}{3}\overline{AD}$ .Cum $\overline{AD}$=$\overline{AC}+\overline{CD}$=$\overline{AC}+\frac{CD}{CB}\overline{CB}$ (CD considerat cu "+"sau" –" după cum D∈ $[BC]$sau C∈ (BD)).Rezultă că $\overline{AD}=\overline{AC}+\frac{b\cos C}{a}\overline{CB}$,apoi $2a^2\overline{AD}$=$2a^2\overline{AC}$+$(b^2+a^2-c^2)(\overline{AB}-\overline{AC})$= $\overline{AC}(a^2+c^2-b^2)$+($b^2+a^2-c^2$) $\overline{AB}$. Analog, dacă E este proiecția lui B pe AC și F proiecția lui C pe AB,găsim $2b^2\overline{BE}=\overline{AC}(-a^2+b^2+c^2)-2b^2\overline{AB}$ $și$ $2c^2\overline{CF}=\overline{AC}$(-$2c^2$) + ($c^2+b^2-a^2$) $\overline{AB}$. Rezultă că $a^2\cdot\overline{AD}$+$b^2\cdot\overline{BE}+c^2\cdot\overline{CF}=\bar{0}$ și de aici concluzia problemei.

9.38) Găsiți locul geometric al punctelor M din planul triunghiului ABC,pentru care vectorul $\overline{MA}+2\overline{MB}+3\overline{MC}$ este paralel cu una din laturile triunghiului.

❖Soluţie

Dacă $\overline{MA}+2\overline{MB}+3\overline{MC}$ este paralelă cu dreapta AB, atunci există k∈ R astfel încât $\overline{MA}+2\overline{MB}+3\overline{MC}$ =k$\overline{AB}$,rezultă că 6$\overline{MA}+2\overline{AB}+3\overline{AC}$ =k$\overline{AB}$ și de aici $\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AC}$+$\frac{2-k}{6}\overline{AB}$. Rezultă că, în acest caz,M se află pe paralela prin C la AB. Analog ,dacă vectorul este paralel cu AC , locul geometric căutat este paralela la AC dusă prin D∈ (AB),AD=$\frac{2}{3}$AB, iar dcă vectorul este parallel cu BC, locul geometric este o dreaptă paraalelă cu BC dusă prin T , $\overline{AT}=\overline{AB}+\frac{3}{2}\overline{AC}$.În concluzie ,locul geometric este format din trei drepte,drepte paralele cu laturile triunghiului ABC.

9.39) Se consideră triunghiul echilateral ABC și punctele M∈(BC),N∈(AC),P∈(AB), astfel încât vectorii $\overline{AM}, \overline{BN}, \overline{CP}$ să fie coliniari. Arătați că suma $\frac{1}{AM^2}$+$\frac{1}{BN^2}+\frac{1}{CP^2}$ este constantă.

❖Soluţie

Notăm cu a lungimea laturii triunghiului ABC și $\frac{CM}{MB}$=k. Deducem $AM^2=x^2$=$\frac{a^2(k^2+k+1)}{(k+1)^2}$. Din AM∥BN∥CP deducem BN=$\frac{x(k+1)}{k}$,CP=x(k+1),apoi $\frac{1}{AM^2}$+$\frac{1}{BN^2}+\frac{1}{CP^2}$=$\frac{2}{a^2}$.

9.40) Știind că patrulaterul ABCD este înscris într-in cerc și punctele H_1, H_2, H_3, H_4 sunt respective ortocentrele triunghiurilor ABC,BCD,CDA și DAB,arătați că patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este înscris într-un cerc.

❖Soluţie

Fie O central cercului circumscris patrulaterului ABCD. Folosind relația lui Sylvester în fiecare din cele patru triunghiuri, se obține$\overline{OH_1}$=$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ și analoagele. Prin scăderi succesive,obținem: $\overline{H_1H_2}$=$\overline{AD}$, $\overline{H_2H_3} = \overline{BA}, \overline{H_3H_4} = \overline{CB}$ $și \overline{H_4H_1} = \overline{DC}$.Urmează că patrulaterele ABCD și $H_1H_2H_3H_4$ sunt congruente și cum ABCD este inscriptibil,deduce că și $H_1H_2H_3H_4$este inscriptibil.

9.41) Fie patrulaterul ABCD, H_1 ortocentrul triunghiului ABC și H_2 ortocentrul triunghiului DBC. Demonstrați că ABCD este inscriptibil dacă și numai dacă H_1H_2∥AD.

❖Soluţie

Fie O_1 centrul cercului circumscris ΔABC și O_2 centrul cercului circumscris ΔDBC.Deoarece A$H_1 \perp BC$ și D$H_2 \perp BC$ rezultă că AH_1 ∥ DH_2. Prin urmare, H_1H_2∥AD⇔ $\overline{AD} \equiv \overline{H_1H_2}$.Dar $\overline{H_1H_2}$=$\overline{r_{H_2}}$-$\overline{r_{H_1}}$=$\overline{r_B} + \overline{r_C} + \overline{r_D} - 2\overline{r_{O_2}} - (\overline{r_B} + \overline{r_C} + \overline{r_A} - 2\overline{r_{O_1}}) = \overline{r_D} - \overline{r_A} + 2(\overline{r_{O_1}} - \overline{r_{O_2}}) = \overline{AD} + 2\overline{O_2O_1}$.Prin urmare, H_1H_2∥AD⇔$\overline{O_2O_1} = \overline{0} \Leftrightarrow O_1 = O_2$⇔ABCD este inscriptibil.

Probleme propuse și selectate de prof. Căpriță Doru Marian

CLASA a X – a

10.29) Sa se resolve ecuatia $(a^x+a^{-x})(1+x^2)=2$ unde a este strict pozitiv si x real oarecare.

❖Soluţie

Ecuatia se poate scrie $a^x+a^{-x} = 2/(1+x^2)$. Se stie ca pentru a>0 avem $a^x+a^{-x}\geq 2$ deci $2/(1+x^2)\geq 2$ adica $1+x^2\leq 1$ rezulta ca $x^2\leq 0$ adica x=0

10.30) Sa se rezolve ecuatia $(x+[x])^{1/2} + (x-\sqrt{x})^{1/2} =1$ unde[x] exte partea intreaga a lui x.

❖Soluţie

Trebuie sa punem conditiile $x\geq 0$ si $x-\sqrt{x}\geq 0$ din care rezulta $x\geq 1$ si diferit de 0.
Daca x=0 ecuatia este imposibila
Daca $x\geq 1$ atunci $[x]\geq 1$ deci $x+[x]\geq 2$ si cum $(x-\sqrt{x})^{1/2}\geq 0$ rezulta ca $(x+[x])^{1/2} + (x-\sqrt{x})^{1/2}\geq \sqrt{2}>1$,
Deci ecuatia nu are solutii.

10.31) Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatia: $a^{x^2}+a^4=2a^{2x}$ unde a>1.

❖Soluţie

Folosind inegalitatea mediilor obtinem: $a^{x^2}+a^4\geq 2\sqrt{a^{x^2}a^4}$ deci $2a^{2^x}\geq\sqrt{a^{x^2+4}}$ de unde rezulta $a^{4^x}\geq a^{x^2+4}$ sau $a^{x^2-4x+4}\leq 1$. Rezulta $(x-2)^2\leq 0$ deci x=2.

10.32) Rezolvati in numere natural: $5^x=1+2^y$.

❖Soluţie

Daca x este nr. Par , x=2n atunci ecuatia devine $5^{2n}-1=2^y$ sau $(5^2-1)(5^{2n-2}+5^{2n-4}+\ldots+5^2+1)=2^y$
Imposibil deoarece membril stang este divizibil cu 3.
Daca x este impar x=2m+1 obtinem $5^{2m+1}-1=2^y$ adica $(5-1)(5^{2m}+5^{2m-1}+\ldots 5+1)=2^y$
Daca m≥1egalitatea precedent nu este posibila deoarece $5^{2m}+5^{2m-1}+\ldots 5+1$ este un nr. Impar mai mare decat 3. Ramane m=0 adica y=2 si atunci x=1.

10.33) Sa se rezolve ecuatia: $1+4^x+9^x=2^x+3^x+6^x$

❖Soluţie

Se noteaza $2^x=a>0$ si $3^x=b>0$ ecuatia se scrie $1+a^2+b^2=a+b+ab$.Se inmultesc ambii membri cu 3 si grupand convenabil avem $(a-1)^2+(b-1)^2+(a-b)^2=0$ de unde avem a=b=1 adica x=0

10.34) Sa se determine a real, incat sistemul urmator sa aiba o singura solutie:

$2^x+2^{-x}+y=a$
$x^2+2^y=3-a$

❖Soluţie

Presupunem (b,c) o solutie a sistemului.Rezulta ca si (-b,c) este o solutie a sistemului si atunci pentru unicitate trebuie b=-b deci b=0.Inlocuind si eliminand pe a se obtine ecuatia $2^y=1-y$. Membrul stang este o functie strict crescatoare iar cel drept strict descrescatoare, ecuatiaare cel mult o solutie.
Se vede ca y=0 si deci a=2.

10.35) Daca functiile f si g: R =>R sunt functii subaditive iar g este si crescatoare sa se demonstreze ca functia gof este subaditiva.

❖Soluţie

Din $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$ si $g(x+y)\leq g(x)+g(y)$ rezulta
$g(f(x+y))\leq g(f(x)+f(y))\leq g(f(x))+g(f(y))=>(gof)(x+y)\leq$
$\leq(gof)(x)+(gof)(y)$.

10.36) Fie f si g :A =>A cu proprietatile :

a) g este bijectiva
b) $fog^{-1}of$ este functia identica. Sa se arate ca
   1) f este bijectiva

2) fof=g
3) fog=gof.

❖Soluţie
Compunand la stanga si la dreapta cu f^{-1} =>$g^{-1}=f^{-1}of^{-1}$=>fof=g
Tinand cont de punctual 2 , 3 este evident.
Deasemeni 1 este aproape evident.

Probleme propuse și selectate de prof. Buga Viorel

CLASA a XI – a

11.28) a) Fie $A,B,C,D\in \mathrm{M}_n(\mathrm{C})$ cu proprietatea că $X+Y=XY$ pentru orice $X,Y\in\{A,B,C,D\}$. Să se arate că $2(A+B+C+D)=ABCD.$

b) Fie $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\1&0&3\end{pmatrix}$. Să se rezolve , în mulțimea $\mathrm{M}_3(\mathrm{R})$, ecuația $X^n=A$, unde $n\in\mathrm{N}^*$ fixat.

❖Soluţie
a) $ABCD=(AB)(CD)=(A+B)(C+D)=AC+BC+AD+BD=A+C+B+C+A+D+B+D=$
$=2(A+B+C+D).$

b) Fie $X\in\mathrm{M}_3(\mathrm{R})$ soluție a ecuației date. Din condiția $AX=XA$ deducem că X trebuie să fie de forma

$X=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&u&0\\c-x&0&c\end{pmatrix}$. Se arată prin inducție că $X^n=\begin{pmatrix}x^n&0&0\\0&u^n&0\\c^n-x^n&0&c^n\end{pmatrix}$. Din ecuația dată obținem

$x=\sqrt[n]{2},u=-1$ (condiție care impune n să fie impar) și $c=\sqrt[n]{3}.$

11.29) Fie $A\in\mathrm{M}_n(\mathrm{C})$ și $A^m=(-1)^m\cdot I_n$ cu $m\in\mathrm{N},m\geq 2$, atunci:
$n\leq rang(I_n+A)+rang(I_n+\varepsilon\cdot A)+\ldots+rang(I_n+\varepsilon^{m-1}\cdot A)\leq(m-1)n,$ unde
$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{m}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{m}.$

❖Soluţie
Se arată că are loc egalitatea $\prod_{k=0}^{m-1}(X+\varepsilon^k\cdot Y)=X^m-(-Y)^m$ pentru orice $X,Y\in\mathrm{M}_n(\mathrm{C})$ cu $XY=YX$.
Folosind acest rezultat avem: $\prod_{k=0}^{m-1}(I_n+\varepsilon^k\cdot A)=I_n-(-1)^m A^m=O_n$. De aici și din inegalitatea Sylvester,

$rang(A_1A_2...A_m) \geq rang(A_1)+rang(A_2)+...+rang(A_m)-(m-1)n$, se obține:

$$0 = rang\left(\prod_{k=0}^{m-1}\left(I_n+\varepsilon^k\cdot A\right)\right) \geq rang(I_n+A)+rang(I_n+\varepsilon\cdot A)+...+rang\left(I_n+\varepsilon^{m-1}\cdot A\right)-(m-1)n,$$

de unde rezultă inegalitatea din dreapta. Pentru inegalitatea din stânga vom folosi faptul că suma rangurilor

este mai mare decât rangul sumei. $\sum_{k=0}^{m-1}\left(I_n+\varepsilon^k\cdot A\right)=mI_n+\left(1+\varepsilon+\varepsilon^2+...+\varepsilon^{m-1}\right)A=mI_n$. Dar

$rang(mI_n)=n$

și de aici rezultă concluzia.

11.30) Fie $A,B,S\in \mathrm{M}_3(\mathrm{C}),S$ fiind o matrice nesingulară astfel încât $B=S^{-1}AS$. Să se arate că:

$$tr\left(B^2\right)+2tr\left(B^*\right)=\left(tr(A)\right)^2.$$

❖Soluţie

$\det(A-xI_3)=\det\left(S^{-1}\right)\cdot\det(A-xI_3)\cdot\det(S)=\det\left(S^{-1}AS-xI_3\right)=\det(B-xI_3)$. Deci matricele A,B au aceleași

valori proprii: $a,b,c\in\mathrm{C}$. Dar ținând cont de faptul că $tr\left(B^2\right)=\sum a^2, tr\left(B^*\right)=\sum ab,$ iar $tr(A)=\left(\sum a\right)^2$, concluzia este imediată.

11.31) Fie $A\in\mathrm{M}_4(\mathrm{R})$ astfel încât $\det\left(A^2-I_4\right)<0$. Să se arate că există $\alpha\in\mathrm{R}, |\alpha|<1$ astfel încât matricea $A+\alpha I_4$ să fie singulară.

❖Soluţie

Fie funcția $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}, f(x)=\det(A+xI_4)$, funcție continuă (deoarece este funcție polinomială). Relația din

ipoteză devine $f(1)\cdot f(-1)<0$. Din proprietatea lui Darboux rezultă că există $\alpha\in(-1,1)$ astfel încât $f(\alpha)=0$.

11.32) Să se demonstreze că, dacă $a\in\left(0,2\sqrt{2}\right]$, atunci $|\ln a+a-1|\geq\sqrt{2}\cdot|a-1|$.

❖Soluţie

Fie $f:\left(0,2\sqrt{2}\right]\to\mathrm{R}, f(x)=(\ln x+x-1)^2-2(x-1)^2$. Avem $f'(x)=2\left(\frac{\ln x+2x-1+x\ln x-x^2}{x}\right)$.

Studiind comportamentul funcției $g:\left(0,2\sqrt{2}\right]\to\mathrm{R}, g(x)=\ln x+2x-1+x\ln x-x^2$ se poate stabili semnul ei,

care corespunde cu semnul funcției f' și se constată că $f'(x)\leq 0$ dacă $x\leq 1$ și $f'(x)\geq 0$ dacă $x\geq 1$. Obținem că $f(x)\geq 0, \forall x\in\left(0,2\sqrt{2}\right]$.

11.33) Fie $f,g:[a,b]\to \mathrm{R}\ (0<a<b)$ două funcții continue pe $[a,b]$ și derivabile pe (a,b). Dacă g este strict crescătoare, atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $\frac{2}{g(a)-g(c)}<\frac{f'(c)}{g'(c)}<\frac{2}{g(b)-g(c)}$.

❖Soluţie

Fie funcția $F:[a,b]\to \mathrm{R}$, $F(x)=(g(a)-g(x))\cdot(g(b)-g(x))\cdot e^{f(x)}$. Deoarece $F(a)=F(b)$, din teorema Rolle

deducem că există $c\in(a,b)$ astfel încât $F'(c)=0\Leftrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{g(a)+g(b)-2g(c)}{(g(a)-g(c))\cdot(g(b)-g(c))}$ (1).

Inegalitatea

$\frac{f'(c)}{g'(c)}>\frac{2}{g(a)-g(c)}$ este echivalentă, folosind (1), cu $g(a)<g(b)$ care este adevărată.

Inegalitatea $\frac{f'(c)}{g'(c)}<\frac{2}{g(b)-g(c)}$ este echivalentă, folosind (1), cu $g(b)>g(a)$ care este adevărată.

11.34) Se consideră funcția $f:[a,b]\to \mathrm{R}$ continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) și numerele reale $x_0,x_1,x_2,...,x_n$

astfel încât $a=x_0<x_1<...<x_n=b$. Să se arate că există numerele reale $c_1,c_2,...c_n$, $c_i\in(x_{i-1},x_i)$, $i\in\{1,2,...,n\}$,

astfel încât $\left(\sum_{i=1}^{n}f^2(c_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})^2\right)\geq(f(b)-f(a))^2$.

Petre Gutescu

❖Soluţie

Aplicând, funcției f, teorema Lagrange pe intervalul $[x_{i-1},x_i]$, $i\in\{1,2,...,n\}$ obținem că există $c_i\in(x_{i-1},x_i)$

astfel încât $f(x_i)-f(x_{i-1})=(x_i-x_{i-1})f(c_i)$, de unde

$\left(\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}f(c_i)(x_i-x_{i-1})\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}f^2(c_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})^2\right)$, de unde concluzia.

Pentru ultima inegalitate s-a folosit inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz.

11.35) Să se arate că există un șir de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $x_n\in\left(\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{2}},\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)$

astfel încât $\lim_{n\to\infty}\left(2x_n\sin\frac{1}{x_n}-\cos\frac{1}{x_n}\right)=\frac{2}{\pi}$.

❖Soluţie

Fie $f:(0,\infty)\to \mathrm{R},\ f(x)=x^2\cdot\sin\frac{1}{x}$ care este continuă și derivabilă pe $(0,\infty)$ cu

$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$

Considerăm șirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ și unde $a_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{2}}$ și $b_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$. Cum funcția f este continuă
pe $[a_n,b_n]$ și derivabilă pe (a_n,b_n) putem aplica teorema Lagrange. Atunci există $x_n\in(a_n,b_n)$ astfel încât

$f'(x_n)=\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$. Cu această scriere ajungem la $\lim\limits_{n\to\infty}f'(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=\frac{2}{\pi}$.

Probleme propuse și selectate de prof. Petre Guțescu

CLASA a XII – a

12.27) Fie $(A,+,\cdot)$ un inel și $p\in\mathrm{N},p>1$ astfel încât $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p-ori}=0$. Arătați că:

a) $\forall x\in A,\ p\cdot x=0$ unde $p\cdot x=\underbrace{x+x+\ldots+x}_{p-ori}$;

b) dacă p este prim și $a,b\in A$ cu $a\cdot b=b\cdot a$, atunci $(a+b)^p=a^p+b^p$;

c) dacă $X=\begin{pmatrix}\hat{1}&a&\hat{b}\\ \hat{0}&\hat{1}&\hat{c}\\ \hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_3(A),p$ prim și $p>2$, atunci $X^p=I_3$.

❖Soluţie

a) $p\cdot x=\underbrace{x+x+\ldots+x}_{p-ori}=\underbrace{1\cdot x+\ldots+1\cdot x}_{p-ori}=\underbrace{(1+\ldots+1)}_{p-ori}\cdot x=0.$

b) Este valabil binomul lui Newton: $(a+b)^p=\sum\limits_{k=0}^{p}C_p^k a^k b^{p-k}$. Cum $p\,|\,C_p^k$ pentru $k\in\{1,2,\ldots,p-1\}$ și $p\cdot x=0,\forall x\in A$ rezultă $(a+b)^p=a^p+b^p$.

c) $X=I_3+B$ unde $B=\begin{pmatrix}\hat{0}&a&\hat{b}\\ \hat{0}&\hat{0}&\hat{c}\\ \hat{0}&\hat{0}&\hat{0}\end{pmatrix}$. Folosind relația de la $b)$ obținem $X^p=I_3+B^p$. Cum $B^3=O_3$ obținem
$X^p=I_3$.

12.28) Fie A un inel finit în care numărul elementelor inversabile este egal cu numărul elementelor nilpotente.

Să se arate că numărul elementelor inelului este o putere a lui 2. ($x \in A$ este element *nilpotent* $\Leftrightarrow \exists n \in \mathrm{N}^*$ astfel încât $x^n = 0$).

❖Soluţie

Se știe că dacă x este nilpotent, atunci $1-x$ este inversabil. Avem astfel o funcție injectivă de la elementele
nilpotente la elementele inversabile și cum mulțimile au același cardinal, funcția este bijectivă. Evident, inversa
ei este tot $1-x$, de unde dacă y este inversabil $1-y$ este nilpotent. Cum -1 este inversabil rezultă că 2 este
nilpotent, adică există $k \in \mathrm{N}^*$ astfel încât $2^k = 0$. Orice element din grupul $(A,+)$ are ordinul de forma 2^m, de
unde, conform teoremei lui Cauchy, avem că numărul de elemente al lui A este de forma 2^p.

12.29) Arătați că dacă $x, y \in A$, unde $(A,+,\cdot)$ este un inel, și $x^r + y^r = (x+y)^r$ pentru orice $r \in \{2,3,5\}$, atunci

$x^n + y^n = (x+y)^n$, $\forall n \in 2\mathrm{N}+1$.

❖Soluţie

Pentru $r=2$ avem $x^2+y^2=(x+y)^2 \Leftrightarrow xy+yx=0$. Pentru $r=3$ obținem $x^3+y^3=(x+y)^3$, de unde
$x^3+y^3=(x+y)^2(x+y)=(x^2+y^2)(x+y)$, așadar $x^2y+y^2x=0$. Pentru $r=5$ avem
$x^5+y^5=(x+y)^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)$, de unde $x^2y^3+y^2x^3=0$.
Avem că $x^2y=x(xy)=x(-yx)=(-xy)x=yx^2$ și analog $y^2x=xy^2$. Mai mult,
$x^2y^3=(x^2y)y^2=y(x^2y)y=$
$=y(yx^2)y=(y^2x)xy=-(x^2y)xy=x^2yyx=y(x^2y)x=y(yx^2)x=y^2x^3$, de unde $x^2y^3=y^2x^3=0$.
Demonstrăm prin inducție cerința. $P(1)$ și $P(2)$ sunt adevărate și arătăm că
$P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
Avem $(x+y)^{2k+3}=(x+y)^2(x+y)^{2k+1}=(x^2+y^2)(x^{2k+1}+y^{2k+1})=x^{2k+3}+y^{2k+3}+x^2y^{2k+1}+y^2x^{2k+1}$.
Conform a ceea ce am demonstrat mai sus avem $x^2y^{2k+1}=y^2x^{2k+1}=0$ pentru $k \geq 1$ și demonstrația
este încheiată.

12.30) Se consideră corpul $(\mathrm{Z}_p,+,\cdot)$, unde p este un număr prim mai mare decît 5. Să se arate că pentru orice $\alpha \in \mathrm{Z}_p$, ecuația $x_1+(x_2)^2+\ldots+(x_{p-1})^{p-1}=\alpha$, în necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, admite o soluție $(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$ cu proprietatea că $a_i \notin \{\hat{0}, \hat{1}\}$, $\forall i \in \{1,2,\ldots,p-1\}$.

❖Soluţie

În cazul $\alpha \in Z_p \setminus \{\hat{1},\hat{2}\}$, punem $x_2 = x_3 = ... = x_{p-1} = -\hat{1}$, $x_1 = \alpha - \hat{1}$. Deoarece $p \geq 5$ rezultă $x_i \notin \{\hat{0},\hat{1}\}$, $\forall i \in \{1,...,p-1\}$ şi $x_1 + (x_2)^2 + ... + (x_{p-1})^{p-1} = \alpha - \hat{1} + \left[\hat{1} + (-\hat{1}) + ... + \hat{1}\right] = \alpha$.

Pentru $\alpha = \hat{1}$ alegem $a \in Z_p$ astfel ca $a \notin \{-\hat{1},\hat{0},\hat{1}\}$, ceea ce se poate deoarece $p \geq 5$. Dacă punem

$x_2 = x_3 = ... = x_{p-1} = a$ şi $x_1 = \hat{1} + a$, atunci $x_i \notin \{\hat{0},\hat{1}\}$, $\forall i \in \{1,...,p-1\}$ şi

$$x_1 + (x_2)^2 + ... + (x_{p-1})^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} a^k = \hat{1},$$

relaţie care este valabilă în Z_p, pentru $a \neq \hat{1}$.

În mod similar pentru $\alpha = 2$ alegem $a \in Z_p$ astfel încât $a \notin \{-2,-\hat{1},\hat{0},\hat{1}\}$ şi punem

$x_2 = x_3 = ... = x_{p-1} = a$, $x_1 = 2 + a$,

care verifică toate condiţiile cerute.

12.31) a) Pentru $a \in R$ dat, determinaţi primitivele funcţiei $f : R \to R$, $f(x) = \left(x^3 + 4a^2x^2 + 3ax + 2a\right) \cdot e^{ax^2}$.

b) Să se calculeze integrala: $\int \left(2x^{10} + 3x^5\right)\sqrt[5]{x^5 + 3}dx$, $x \in R$.

c) Să se determine funcţia continuă $f : [0,1] \to R$ care satisface identitatea:

$$\int_0^1 \left(2x^2 - 3f(x)\right)f(x)dx = \frac{1}{15}.$$

❖Soluţie

a) Primitiva lui f este de forma $F(x) = \left(mx^2 + nx + p\right)e^{ax^2}$, de unde

$f(x) = F'(x) = \left(2amx^3 + 2anx^2 + 2apx\right)e^{ax^2} + (2mx + n)e^{ax^2} = \left(2amx^3 + 2anx^2 + (2ap + 2m)x + n\right)e^{ax^2}$, de unde

$m = \frac{1}{2a}, n = 2a$ şi $p = \frac{3}{2} - \frac{1}{2a^2}$.

b) Primitiva are forma $H(x) = g(x)\left(x^5 + 3\right)^{\frac{6}{5}} + c$ unde g este o funcţie polinomială. Avem că

$H'(x) = g'(x)\left(x^5 + 3\right)^{\frac{6}{5}} + 6x^4 g(x)\sqrt[5]{x^5 + 3} = \left(g'(x)\left(x^5 + 3\right) + 6x^4 g(x)\right)\sqrt[5]{x^5 + 3}$. Aşadar

$g'(x)\left(x^5 + 3\right) + 6x^4 g(x) = 2x^{10} + 3x^5$. De aici se vede că $g(x) = \frac{x^6}{6}$. Avem astfel

$\int \left(2x^{10} + 3x^5\right)\sqrt[5]{x^5 + 3}dx =$

$= \frac{x^6}{6}\left(x^5 + 3\right)\sqrt[5]{x^5 + 3} + C.$

c) Avem că $\int_0^1 g^2(x)dx \geq 0$ pentru orice $g:[0,1]\to \mathrm{R}$. Pentru $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}$ avem $\int_0^1 f^2(x)dx-\frac{2}{3}\int_0^1 x^2 f(x)dx+\frac{1}{9}\int_0^1 x^4dx\geq 0 \Leftrightarrow 3\int_0^1 f^2(x)dx-2\int_0^1 x^2 f(x)dx+\frac{1}{15}\geq 0$. Din ipoteză avem egalitate,

așadar $f(x)-\frac{x^2}{3}=c$, unde c este o constantă, de unde $f(x)=\frac{x^2}{3}+c$.

12.32) Se consideră $n\in \mathrm{N}, n\geq 3$ și funcțiile $f_i:[a,b]\to\to[c,\infty), i\in\{1,2,...,n\}, c>0,$ continue pe intervalul $[a,b]$.

Să se arate că, pentru orice $\sigma\in S_n$, avem inegalitatea:

$$\left(\int_a^b f_1(x)dx\right)\left(\int_a^b f_2(x)dx\right)...\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)\leq\left(\int_a^b \frac{f_1^2(x)}{f_{\sigma(1)}(x)}dx\right)\left(\int_a^b \frac{f_2^2(x)}{f_{\sigma(2)}(x)}dx\right)...\left(\int_a^b \frac{f_n^2(x)}{f_{\sigma(n)}(x)}dx\right).$$

❖Soluţie

Folosind inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwarz avem

$\left(\int_a^b \frac{f_i^2(x)}{f_{\sigma(i)}(x)}dx\right)\left(\int_a^b f_{\sigma(i)}(x)dx\right)\geq\left(\int_a^b f_i(x)dx\right)^2$ pentru orice $i\in\{1,2,...,n\}$.

Făcând produsul tuturor acestor inegalități și ținând cont de faptul că

$\prod_{i=1}^n\left(\int_a^b f_i(x)dx\right)=\prod_{i=1}^n\left(\int_a^b f_{\sigma(i)}(x)dx\right)$ obținem

inegalitatea cerută.

12.33) Să se determine funcțiile continue $f,g:[0,1]\to \mathrm{R}$ care satisfac relația:

$$2\cdot\int_0^1 f(x)\left(2x-3f(x)\right)dx+3\cdot\int_0^1 g(x)\left(x-2g(x)\right)dx=\frac{25}{72}.$$

Petre Gutescu

❖Soluţie

Prin înmulțirea cu $\frac{1}{6}$, relația din enunț se scrie în mod echivalent:

$$\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\left(2x-3f(x)\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^1 g(x)\left(x-2g(x)\right)dx=\frac{25}{3\cdot 9\cdot 16}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\left(2x-3f(x)\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^1 g(x)\left(x-2g(x)\right)dx=\frac{1}{27}+\frac{1}{48}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{9}\int_0^1 x^2dx-\int_0^1\left(\frac{2x}{3}f(x)-f^2(x)\right)dx+\frac{1}{16}\int_0^1 x^2dx-\int_0^1\left(\frac{x}{2}g(x)-g^2(x)\right)dx=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\left(\frac{x^2}{9}-\frac{2x}{3}f(x)+f^2(x)\right)dx+\int_0^1\left(\frac{x^2}{16}-\frac{x}{2}g(x)+g^2(x)\right)dx=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\left(\frac{x}{3}-f(x)\right)^2dx+\int_0^1\left(\frac{x}{4}-g(x)\right)^2dx=0\Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{3},\ g(x)=\frac{x}{4},\forall x\in[0,1].$$

12.34) Să se calculeze $\int_a^b \frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{\frac{b}{x}}}{\sqrt{x}\sqrt{ab+x^2}}dx$, unde $0<a<b$.

❖Soluţie

Facem schimbarea de variabilă $\frac{x}{a}=\frac{b}{t}$ de unde $t=\frac{ab}{x}$. Așadar $dx=-\frac{ab}{t^2}dt$. Integrala devine:

$I=\int_b^a \frac{e^{\frac{b}{t}}-e^{\frac{t}{a}}}{\sqrt{\frac{ab}{t}}\cdot\sqrt{ab+\frac{a^2b^2}{t^2}}}\cdot\left(\frac{-ab}{t^2}\right)dt=-\int_a^b \frac{e^{\frac{t}{a}}-e^{\frac{b}{t}}}{\sqrt{t}\cdot\sqrt{ab+t^2}}dt=-I$ de unde $I=0$.

Probleme propuse și selectate de prof. Petre Guțescu