CLASA a IX a

9.42) Dacă a,b,c sunt numere reale pozitive, astfel încât $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{3}$ să se arate că:

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}$;

b) $a-2b+c\le\sqrt{10}$.

9.43) Se consideră expresia $E(x)=|x-1|+|x-2|+...+|x-2018|$, $x\in\boldsymbol{R}$.

Determinați $\min\limits_{x\in\boldsymbol{R}}E(x)$ precum și pentru ce valori ale lui x se realizează.

Petre Guțescu

9.44) Să se determine numerele strict pozitive $a_1,a_2,...,a_n$ pentru care este adevărată egalitatea:

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=\frac{2n+1}{3}\cdot(a_1+a_2+...+a_n),\ \forall n\in\boldsymbol{N}^*.$$

9.45) Să se determine funcția $f:N^*\to\boldsymbol{R}^*$ care verifică simultan condițiile:

a) $f(1)=2008$,

b) $f(1)+f(2)+...+f(n)=\frac{1}{n}f(n),\ \forall n\in\boldsymbol{N}^*$.

9.46) Fie mulțimea $A=\{1,2,...,n\},n\in\boldsymbol{N},n\ge6$. Să se arate că *A* este reuniunea a trei mulțimi disjuncte două câte două, cu același cardinal și aceeași sumă a elementelor lor, dacă și numai dacă *n* este multiplu de 3.

9.47) Considerăm punctele *M* și *N* în planul triunghiului *ABC* și $p,q\in\boldsymbol{R}^*$. Știind că $\overrightarrow{AM}=p\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{CN}=q\overrightarrow{CB}$, să se arate că *A, M* și *N* sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{1}{q}-\frac{1}{p}=1$.

9.48) Fie *ABCDE* un pentagon înscris într-un cerc. Notăm cu H_1,H_2,H_3,H_4 ortocentrele triunghiurilor *ABC, BCD, CDE,* respectiv *ACE.*Să se demonstreze că patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

9.49) Fie *ABCD* un patrulater inscriptibil. Se notează cu *P* punctul de intersecție a dreptelor *AD* și *BC*, și cu *Q* punctul de intersecție a dreptelor *AB* și *CD*. Fie *E* al patrulea vârf al paralelogramului *ABCE* și *F* intersecția dreptelor *CE* și *PQ*. Să se demonstreze că punctele *D, E, F* și *Q* sunt pe un același cerc.

Probleme propuse și selectate de prof. **Petre Guțescu**

CLASA a X a

10.37) Fie z_i ,i=1,...,5, numere complexe astfel încât toate au același modul nenul și avem: $\sum_{i=1}^{5} z_i = \sum_{i=1}^{5} z_i^2 = 0$. Să se arate că $z_1, z_2, ..., z_5$ sunt afixele vârfurilor unui pentagon regulat.

10.38) Fie a,b,c afixele vârfurilor A,B,C ale unui triunghi cu $|a|=|b|=|c|=1$. Să se arate că dacă există $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $a+b\cdot \cos t + c\cdot \sin t = 0$, atunci aria S_{ABC} a triunghiului satisface inegalitățile: $1 < S_{ABC} \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

10.39) Să se domonstreze că dacă numerele $z_1, z_2 \in \boldsymbol{C}^*$ verifică relația $z_1 \cdot 2^{|z_1|} + z_2 \cdot 2^{|z_2|} = (z_1+z_2) \cdot 2^{|z_1+z_2|}$,atunci $z_1^6 = z_2^6$.

10.40) Fie a,b numere complexe nenule și z_1 ,z_2 rădăcinile polinomului $x^2 + ax + b$.Să se arate că $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ dacă și numai dacă există $t \geq 4$ astfel încât $a^2 = t\cdot b$.

10.41) Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} 4^{-x} + 27^{-y} = \frac{5}{6} \\ 27^{y} - 4^{x} \leq 1 \\ \log_{27} y - \log_4 x \geq \frac{1}{6}. \end{cases}$

10.42) Fie $a \geq 1$ un număr real și z un număr complex cu proprietățile $|z + a| \leq a$ și $|z^2 + a| \leq a$. Să se arate că $|z| \leq a$.

10.43) Să se determine restul împărțirii numărului 3^{2^n}-1 la 2^{n+3},$n \in \boldsymbol{N}^*$.

10.44) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}$,există $x \in (1, \infty)$ aastfel încât $[\log_x 3] - [\log_x 2] = n$ (cu $[t]$ s-a notat partea întreagă a numărului t).

10.45) Să se determie rădăcinile compexe comune ale ecuațiilor

$x^{m+1} - x^n + 1 = 0$ și $x^{n+1} - x^m + 1 = 0$, $m, n \in \boldsymbol{N}^*$.

10.46) Fie a,b,c numere întegi, a par și b impar. Să se arate că oricare ar fi numărul natural n, există un număr natural x , astfel încât 2^n divide ax^2+bx+c.

Probleme propuse și selectate de prof. **Doru-Marian Căpriță**

10.47) Să se rezolve, în necunoscuta $x > 0$, ecuația: $\left[\log_2 x\right]^2 = p \cdot \left[\log_3 (x+1)\right]^2$, $p \in$ ù*, p număr prim fixat. (Prin $[a]$ se înțelege *partea întreagă* a numărului a.)

Petre Guțescu

CLASA a XI a

11.36) Să se arate că orice șir de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$ cu proprietatea : $\frac{1}{8}(6a_{n+1}\text{-}a_n)\leq a_{n+2}\leq \frac{1}{6}(5a_{n+1}-a_n)$, $(\forall)n\geq 0$,este convergent cu limita zero.

11.37) Fie șirul $(x_n)_{n\geq 2}$ definit astfel: $x_2>0, x_{n+1=-1+\sqrt[n]{1+nx_n}}$ pentru orice n≥2.Să se arate că :

a) Șirul $(x_n)_{n\geq 2}$ este monoton și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$= 0;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$=1 și $\lim\limits_{n\to\infty}$nx_n=0.

11.38) Fie A,B ∈ M_n(C) astfel încât AB+BA=O_n și det(A+B)=0. Să se arate că det$(A^3-B^3)=0$.

4.Fie n∈ $N, n\geq 3$.Să se determine X∈ M_2(R) astfel încât $X^n+X^{n-2}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

11.39) Fie A∈ $\mathrm{M}_{3,2}$(C),B∈ $\mathrm{M}_{2,3}$(C) astfel încât AB=$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.Să se calculeze det(BA).

11.40) Fie A,B∈ M_2(R) astfel încât det(AB+BA)≤ 0.Să se arate că det $(A^2+B^2)\geq 0$.

11.41) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numerre reale cu proprietățile:

a) șirul x_n= $\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$ este convergent;

b) șirul y_n=$\sum_{k=1}^{n} a_k$ este nemărginit.

Să se arate că șirul b_n=$\{y_n\}$ este divergent ($\{y_n\}$este partea fracționară a lui y_n).

11.42) Fie A∈ M_2(C) și C(A)=$\{B\in \mathrm{M}_2(\mathrm{C})/\mathrm{AB}=\mathrm{BA}\}$. Să se arate că $|\det(A+B)|\geq|\det(B)|$, pentru orice B∈C(A), dacă și numai dacă $A^2=O_2$.

11.43) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} tg\frac{i}{n^2}$.

11.44) Pentru ce valori ale lui $x_1$este convergent șirul ce satisface relația de recurență: ${x_n=x_{n-1}}^3+\frac{3}{4}x_{n-1}$; (n≥ 2).

Probleme propuse și selectate de prof. **Doru-Marian Căpriță**

11.45) Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1\\ 1-\sqrt{3} & \sqrt{3}+1\end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n, n\in$ ù*.

Petre Guțescu

CLASA a XII a

12.35) Fie $(G,\cdot)$ un grup și $a,b\in G$ care verifică relațiile: $a\cdot b=b\cdot a^2$, $b\cdot a=a\cdot b^2$. Să se arate că $a\cdot b^3=b\cdot a^3=e$.

12.36) Fie $n\in \boldsymbol{N}, n\geq 2, (S_n,\circ)$ grupul permutărilor de grad n și $A_n=\{\sigma\in S_n \mid \varepsilon(\sigma)=1\}$.

a) Să se arate că: $\forall x\in S_n, \forall \sigma\in A_n, x\sigma x^{-1}\in A_n$.

b) Să se studieze existența unui subgrup $(H,\circ)$ al grupului $(S_n,\circ)$ care să verifice condițiile: $i) H\setminus A_n\neq\varnothing$; $ii) card(H\cap A_n)\neq card(H\setminus A_n)$.

12.37) Fie p un număr prim, $p\geq 3$, iar $\boldsymbol{Z}_P^*=\boldsymbol{Z}_p-\{\hat{0}\}$. Pe $\boldsymbol{Z}_p$ considerăm înmulțirea claselor de resturi.

a) Să se arate că dacă $a\in\boldsymbol{Z}_p^*$, atunci a este simetrizabil.

b) Să se calculeze $\hat{1}^{-1}+2^{-1}+\ldots+\overline{p-1}^{-1}$ și $\hat{1}\cdot 2+2\cdot\hat{3}+\ldots+\overline{p-2}\cdot\overline{p-1}$.

12.38) a) Calculați: $\int\frac{2+\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\cdot xe^{\frac{x^2}{2}}dx$.

b) Să se determine funcția $f:\left(0,\sqrt{\pi}\right)\to\boldsymbol{R}$ care admite primitive pe $\left(0,\sqrt{\pi}\right)$ și care verifică relația

$\frac{1}{x}f(x)+F(x)=\frac{2+\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$, $\forall x\in\left(0,\sqrt{\varepsilon}\right)$, unde F este primitiva lui f, iar $f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

12.39) Se consideră funcțiile $f,F:ú\to ú$, unde F este o primitivă a lui f pe ú care verifică relația: $F^2(x)f(x)\geq\frac{\sin 2x}{a+\cos^2 x}$, $\forall x\in ú, a>0$, a fixat. Să se arate că nu există $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)\in ú$.

Petre Gușescu

12.40) Să se determine primitivele funcției

$f_n:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f_n(x)=\frac{x^5+10x^4+44x^3+104x^2+134x+76}{\left(x^2+4x+6\right)^n}$, $n\in\boldsymbol{N}^*$.

12.41) Să se calculeze:

a) $\int\frac{\sin x}{2e^x+\cos x+\sin x}dx$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

b) $\int\left(x+1-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

12.42) Fie $f:(-\infty,0]\to\boldsymbol{R}$ și F o primitivă a lui f cu proprietatea $F(x)-f(x)=\arcsin\left(e^x\right)$, $\forall x\in(-\infty,0]$. Determinați funcția f știind că $F(0)=\frac{\pi}{2}$.

Probleme propuse și selectate de prof. **Petre Gușescu**